

# Exercícios de Astronomia e Astrofísica para olimpíadas culturais. Volume 2

Thiago Paulin Caraviello

## Introdução

*Exercícios de Astronomia e Astrofísica para olimpíadas culturais* é uma compilação de 52 questões, acompanhado das suas soluções, que tem por objetivo complementar os estudos dos alunos do ensino médio envolvidos em atividades olímpicas culturais de Astronomia. É uma ferramenta espetacular para aqueles que já tiveram contato com o assunto.

Os exercícios foram selecionados a partir dos temas mais frequentes presentes nas seletivas das equipes de estudantes que participaram da Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica (OLAA) e da *International Olympiad in Astronomy and Astrophysics* (IOAA), assim como exercícios destas competições.

Cada exercício vem acompanhada de uma letra que indica o nível de dificuldade segundo o autor. **[A]** indica menor dificuldade, **[B]** dificuldade moderada e **[C]** maior nível de dificuldade.

## Autor

Professor de Física e Astronomia para alunos do ensino médio desde 2003, formado pela Universidade de São Paulo, possui grande experiência em competições olímpicas culturais de Astronomia. Esteve presente em 4 edições da Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica: IV OLAA - Colômbia, V OLAA - Bolívia, VII OLAA - Brasil e VIII OLAA - Argentina; e em 3 edições da *International Olympiad in Astronomy and Astrophysics*: 7th IOAA - Grécia, 8th IOAA - Romênia e 10th IOAA - Índia. Atual membro da comissão organizadora da OBA.



## Índice

Astronomia.....	02
Astrofísica.....	05
Soluções: Astronomia.....	12
Soluções: Astrofísica.....	23
Gabaritos: Astronomia e Astrofísica.....	38
Tabelas e Constantes.....	39

## Astronomia

1) [A] (*seletiva*) Sabendo que o Sol nascerá, no dia 20/mar/2014, às 6 h 10 min 12 s na cidade de São Paulo (23,5° S ; 46,6° W), neste mesmo dia, o Sol nascerá aproximadamente a que horas na cidade de Bertioga (23,9° S ; 46,1° W)?

a) 6 h 08 min    b) 6 h 09 min    c) 6 h 10 min    d) 6 h 11 min    e) 6 h 12 min

2) [A] (*seletiva*) Em Sydney, Austrália (33,5° S; 151,2° E), a que horas, aproximadamente, o Sol nascerá no dia 20/mar/2014? Se necessário, adote valores do teste anterior.

a) 5 h 57 min    b) 5 h 59 min    c) 6 h 01 min    d) 6 h 03 min    e) 6 h 05 min

3) [C] (*1st IOAA*) Para um observador numa latitude 42,5° N e longitude 71° W, estime a hora do nascer do Sol no dia 21 de dezembro se o horário civil do observador é -5 GMT. Ignore a refração da atmosfera e o tamanho do disco solar.

4) [A] (*seletiva*) Um observador vê a estrela Sirius ( $\delta_{\text{Sirius}} = -16^{\circ} 43' 24,6''$ ) passar pelo meridiano astronômico local a uma distância zenital  $z = 39^{\circ} 05' 34,4''$  e azimute  $A = 180^{\circ}$  contado a partir do ponto cardeal Norte para Leste. Determine a latitude na qual se encontra o observador.

5) [A] Em Tbilisi, capital de Geórgia, observa-se a culminação inferior da estrela  $\beta$  Ursa Majoris ( $\delta = +74^{\circ} 31'$ ) a uma distância zenital de  $63^{\circ} 46'$ . Determine a latitude de Tbilisi.

6) [A] Em Kiev ( $\varphi = +50^{\circ} 27'$ ) se observa a culminação superior de um cometa às 15 h 15 min 10 s de tempo sideral. Neste instante, o círculo vertical de um teodolito indica a distância zenital do cometa sendo  $3^{\circ} 52'$  ao sul do zênite. Determine as coordenadas equatoriais, isto é, declinação e a ascensão reta, do cometa.

7) [A] Uma estrela descreve, acima do horizonte, um arco de  $180^{\circ}$  desde o instante do nascer até seu ocaso. Durante a culminação superior, dista  $55^{\circ}$  ao norte do zênite.

a) Qual a declinação desta estrela?

b) Qual o ângulo que o plano do equador celeste está inclinado em relação ao horizonte?

8) [A] Determine as coordenadas equatoriais de duas estrelas A e B que às 7 h 35 min de tempo sideral que culminam em Moscou ( $\varphi = +55^{\circ} 45'$ ) a uma distância zenital  $z = 40^{\circ}$ , respectivamente, ao sul e ao norte do zênite.

9) [A] A altura do bordo inferior do Sol, no instante que este cruza o meridiano local, foi medido por meio de um sextante que estava em um bote em alto mar sendo  $84^{\circ} 21'$  ao sul do zênite. Neste dia, a declinação do centro do Sol era  $\delta = +18^{\circ} 39'$ . Determine a latitude do local de observação tendo em conta que o diâmetro angular médio do Sol vale  $32'$ .

10) [B] Para uma estrela circumpolar obteve-se, na culminação superior,  $10^{\circ} 20' 30''$  ao norte do zênite, e na culminação inferior,  $30^{\circ} 20' 10''$  ao sul do zênite. Determine a latitude local e a declinação da estrela.

11) [A] (*II OLAA*) Um observador em Bogotá, cuja longitude é  $\lambda = 74^{\circ} 05'$  oeste, mede o ângulo horário de uma estrela e obtém o valor  $H = 45^{\circ} 30'$ . Neste instante, o tempo sideral de Greenwich era TSG = 12 h 30 min. Qual é a ascensão reta desta estrela?

12) [A] (*IV OLAA*) Um observador no dia de solstício de junho conhece a altura de um poste e mede sua sombra durante a passagem do centro do disco solar pelo meridiano do lugar. Determine:

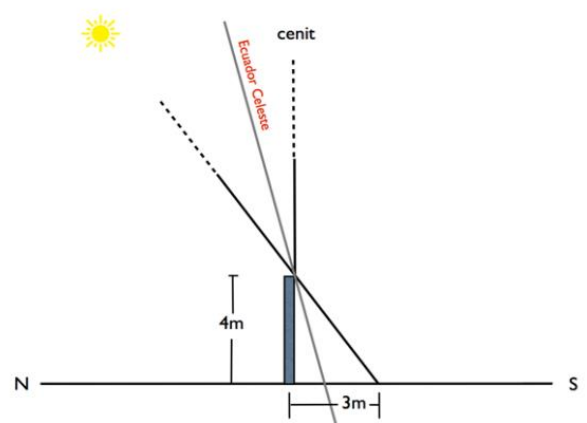
a) O azimute (A) do Sol nesse instante. Considere como origem da coordenada esférica o ponto cardeal norte, e o sentido positivo na direção do leste.

b) A declinação ( $\delta$ ) do Sol.

c) O ângulo horário (H).

d) A altura (h) do Sol.

e) A ascensão reta ( $\alpha$ ).



- f) O tempo sideral local (TSL) para este instante.  
g) A latitude geográfica ( $\phi$ ) deste observador.

**13) [B] (VII OLAA)** Entre as estrelas da tabela a seguir (equinócio 2000), escreva qual é, ou quais são:

- a) As que pertencem ao hemisfério sul celeste.  
b) As que nunca podem ser vistas em Santiago ( $\phi = 33^\circ$  S).  
c) As que são circumpolares visíveis em Montevideo ( $\phi = 35^\circ$  S);  
d) A que faz sua passagem meridiana mais próxima do zênite na Cidade do México ( $\phi = 19^\circ$  N);  
e) A que faz sua passagem meridiana em 21 de março no horário mais próximo das 2 h 30 min (hora local) no Rio de Janeiro ( $\phi = 23^\circ$  S;  $\lambda = 43^\circ$  W).

Estrela	Ascensão Reta (AR)	Declinação( $\delta$ )
Peacock ( $\alpha$ -Pav)	20h 25min 39s	- $56^\circ 44' 07,4''$
Alderamin( $\alpha$ -Cep)	21h18min34,9s	+ $62^\circ 35' 06,4''$
Algeiba ( $\gamma$ -Leo)	10h 19min 58,7s	+ $19^\circ 50' 25,9''$
Rigel ( $\beta$ -Ori)	5h 14min 32,3s	- $08^\circ 12' 05,9''$
Polaris ( $\alpha$ -UMi)	2h 31min 50,2s	+ $89^\circ 15' 51,3''$
Regulus ( $\alpha$ -Leo)	10h 08min 22s	+ $11^\circ 58' 02,8''$
Arcturus ( $\alpha$ -Boo)	14h15min38,6s	+ $19^\circ 10' 22,1''$
Pollux ( $\beta$ -Gem)	7h 45min 18,2s	+ $28^\circ 01' 31,7''$
Achernar ( $\alpha$ -Eri)	1h 37min 43s	- $57^\circ 14' 13,3''$

**14) [C] (3rd IOAA)** Devido à precessão do eixo da Terra, a região do céu visível num local com coordenadas geográficas fixas muda com o tempo. Responda: É possível que, em alguma época, Sirius não nasça para um observador na Cracóvia ( $\phi=50,1^\circ$  N), ao mesmo tempo em

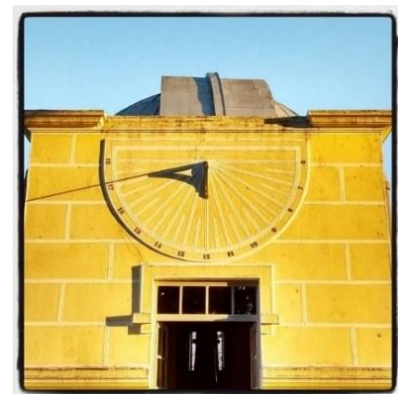
que Canopus nasça e se ponha? Considere que o eixo da Terra percorre um cone de  $47^\circ$  de abertura. As coordenadas equatoriais atuais (ascensão reta e declinação) dessas estrelas são:

Sirius ( $\alpha$  CMa) : 6h45min ;  $-16^\circ 43'$

Canopus ( $\alpha$  Car) : 6h24min ;  $-52^\circ 42'$

**15) [B] (6th IOAA)** No Observatório Nacional do Brasil, localizado na cidade do Rio de Janeiro ( $22^\circ 54' S$  ;  $43^\circ 12' W$ ), existe um relógio de Sol preso a porta da cúpula que leva ao telescópio. Este relógio é constituído por uma única haste de 32 cm, inclinada para o norte e paralelo ao eixo de rotação da Terra. Considerando que a porta está contida no plano leste - zênite - oeste, determine:

- a) Para quais declinações do Sol o relógio não irá funcionar, no mínimo, uma fração do dia?  
b) Para quais declinações do Sol o relógio não irá funcionar em nenhum momento do dia?



**16) [A] (seletiva)** Em relação à Terra e ao Sol, o período sinódico de Vênus é de aproximadamente 584 dias e o de Júpiter 399 dias. De quanto em quanto tempo Júpiter é visto em oposição ao Sol a partir de Vênus? Ou seja, qual o período sinódico, aproximadamente, de Júpiter tendo Vênus e o Sol como referências?

- a) 224 dias    b) 237 dias    c) 365 dias    d) 1260 dias    e) 4037 dias

**17) [A] (3rd IOAA)** Suponha que você viva na época de Copérnico não conhecendo as Leis de Kepler. Após aceitar a ideia revolucionária de que todos os planetas orbitam o Sol, você mede o período orbital de Marte como 687 dias. A seguir, você observa que, 106 dias após a oposição de Marte, o planeta aparece em quadratura. Calcule a distância Marte-Sol, em unidades astronômicas.

**18)** [A] Um satélite gira em torno da Terra em órbita circular ao longo do equador celeste posicionado na mesma longitude de Porto Alegre ( $\phi = 30^\circ$  S). Um observador em Porto Alegre mede a altura do satélite sendo  $h = 45^\circ$  quando este cruza o meridiano local. Determine, neste instante, a distância entre o satélite e o observador.

**19)** [B] (5th IOAA) Assumindo que Phobos move-se em torno de Marte em uma órbita perfeitamente circular e sobre o plano equatorial deste planeta, determine o tempo que Phobos ficará acima do horizonte para um observador (marciano) situado sobre a linha do equador.

Adote: Período orbital de Marte = 24,63 h; raio de Marte = 3393 km; altitude de Phobos = 5987 km ; massa de Marte =  $6,39 \cdot 10^{23}$  kg.

**20)** [B] (3rd IOAA) Um estudante tenta medir o campo de visão da ocular de seu telescópio usando a rotação da Terra. Para tal, o observador aponta o telescópio para Vega ( $\alpha$ -Lyr: AR = 18,5 h ;  $\delta = +39^\circ$ ), desliga o motor de acompanhamento e mede o tempo que Vega leva para cruzar o diâmetro do campo de visão obtendo o valor  $t = 5,3$  min. Qual o campo de visão deste telescópio em minutos de arco?

**21)** [C] (3rd IOAA) A Montanha Damavand está localizada na região norte do Irã, costa sul do Mar Cáspio. Considere um observador sentado no topo desta montanha (latitude =  $35^\circ 57'$  N; longitude =  $52^\circ 6'$  E; altitude =  $5,6 \cdot 10^3$  m a partir do nível do mar) e contemplando o céu por acima do Mar Cáspio. Qual é a declinação mínima de uma estrela para ser vista marginalmente circumpolar para esse observador? O raio geodésico da Terra, nesta latitude, é de 6370,8 km. O nível da superfície do Mar Cáspio é aproximadamente igual ao nível médio do mar

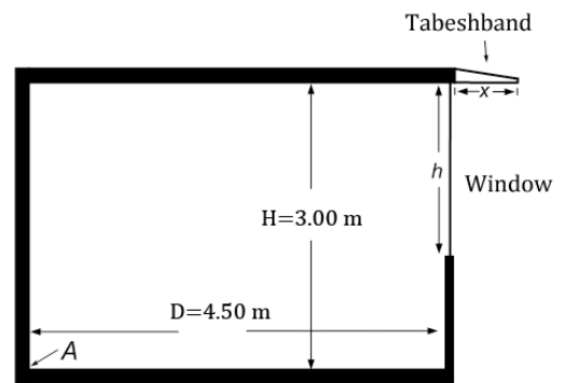
**22)** [B] (V OLAA) A Lua é vista no horizonte como mostra a figura a seguir. Analisando a imagem, identifique e justifique astronomicamente em que fase a Lua está. Estime a hora neste instante e também se o horizonte mostrado é o ocidental ou oriental.



Figura da questão 22

**23)** [C] (2nd IOAA) Uma Lua Cheia aconteceu em 19 de Junho de 2008 às 00 h 30 min Tempo Oeste Indonésio (hora local civil para a parte oeste da Indonésia, com meridiano de  $105^\circ$  E). Calcule os valores máximos e mínimos possíveis da duração da Lua acima do horizonte dos observadores no observatório em Bosscha (longitude:  $107^\circ 35' 00''$  E, latitude:  $6^\circ 49' 00''$  S, elevação: 1300 m). Zona de tempo = UT +7h 30 min. Inclinação da órbita lunar em relação ao plano da eclíptica =  $5,14^\circ$ .

**24) [C] (3rd IOAA)** Na arquitetura Persa típica, existe uma estrutura chamada “Tabeshband” (marquise), no topo das janelas voltadas para o Sul, que controla a incidência de luz solar no verão e no inverno. No verão, quando o Sol está alto, a Tabeshband impede a luz do Sol de entrar nos aposentos, mantendo o interior mais frio. Na arquitetura moderna, é sabido que a Tabeshband economiza cerca de 20% do custo de energia. A Figura 1 mostra uma seção vertical de uma casa, à latitude de  $36^\circ$  N, com a janela e o Tabeshband.



Usando os parâmetros desenhados na figura, calcule a largura máxima da Tabeshband,  $x$ , e a altura máxima da janela,  $h$ , de forma que:

- Nenhuma luz solar direta atinja o quarto ao meio-dia do solstício de verão.
- A luz do Sol atinja o fim do quarto (indicado pelo ponto A na figura) ao meio-dia do solstício de inverno.

**25) [B] (10th IOAA)** Um observador no hemisfério norte reparou que o comprimento da menor sombra de uma vareta vertical de 1,000 m em determinado dia foi de 1,732 m. No mesmo dia, o comprimento da maior sombra foi de 5,671 m. Encontre a latitude  $\varphi$  do observador e a declinação do Sol  $\delta$  nesse dia. Considere o Sol como uma fonte puntiforme e ignore a refração atmosférica.

**26) [C] (6th IOAA)** Um observador em Salonika ( $\varphi = 40,65^\circ$  N), Grécia, contempla o céu estrelado. De repente, ele percebe que uma estrela ( $\alpha = 5\text{h } 55\text{ min}$  ;  $\delta = 7,41^\circ$  e  $m = 0,45$ ), durante sua passagem pelo meridiano local, misteriosamente se desprende da esfera celeste e continua o seu movimento com velocidade tangencial constante por toda eternidade! Considere a Terra em repouso e a esfera celeste em rotação.

- Determine as coordenadas alto-azimutais finais desta estrela.
- Determine quanto tempo levará para a estrela atingir magnitude aparente 6.

## Astrofísica

**1) [A] (V OLAA)** Um satélite de 300 kg de massa se encontra em uma órbita circular ao redor da Terra a uma altura de 500 km da superfície. Ele realiza uma manobra de tal maneira que passa para uma nova órbita circular cujo raio é o triplo da anterior. Neste contexto, responda:

- Qual é a variação de energia mecânica do satélite?
- Qual é a relação entre os períodos das órbitas?
- Deduza a expressão geral para a velocidade de escape do satélite a uma distância  $r$ , medida desde o centro da Terra para este problema em particular. Qual a razão entre as velocidades de escape de ambas as órbitas?

**2) [A] (seletiva)** No dia 18 de fevereiro de 2014 um asteroide com 270 m de largura passou próximo da Terra. Mesmo sendo considerada potencialmente perigosa, a rocha espacial, conhecida como 2000 EM26, não representou ameaça. A distância mais próxima da Terra a que ela chegou foi de 3,4 milhões de km, o equivalente a 8,8 vezes a distância entre nosso planeta e a Lua. Sua velocidade foi estimada em 47 mil km/h. Sabendo destas informações, determine:

- o tipo de órbita do asteroide (elíptica, parabólica ou hiperbólica), supondo a interação apenas com o Sol, e considerando que no momento de maior aproximação à Terra, ocorreu um alinhamento Sol-Asteróide-Terra.
- o tipo de órbita do asteroide (elíptica, parabólica ou hiperbólica), supondo a interação apenas com a Terra.

**3) [B] (2nd IOAA)** Encontre a relação para a velocidade de escape de um objeto lançado a partir do centro de uma nuvem proto-estelar. Esta nuvem de gás de massa  $M$  e raio  $R$  possui densidade uniforme. Ignore as colisões entre as partículas da nuvem e o objeto. Considere o fato de que se o objeto fosse abandonado da extremidade limite da nuvem, chegaria ao seu centro com velocidade igual a  $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ .

**4) [A]** Prove que, em uma órbita elíptica kepleriana, o semi-eixo maior  $a$  é dado por:

$$a = P \cdot \frac{\sqrt{v_M \cdot v_m}}{2\pi}$$

Onde:  $P$  é o período orbital,  $v_M$  e  $v_m$  são, respectivamente, a velocidade máxima e mínima nesta órbita.

**5) [B] (seletiva)** Uma situação inesperada ocorre quando um astronauta se desgarra de um satélite artificial da Terra pelo rompimento do “cordão umbilical” que o liga ao satélite durante sua missão externa. Uma pane momentânea nos sistemas eletrônicos do satélite complica a situação e impede qualquer ação imediata da tripulação para salvamento do astronauta. Nesse instante o astronauta aciona seu equipamento de propulsão, que ainda tem combustível para impulsioná-lo rapidamente a uma velocidade de 10 m/s, em direção radial ao satélite. Queremos saber se o astronauta conseguirá alcançar o satélite para tentar fazer uma ancoragem provisória nessas condições. Seguem alguns dados relativos ao problema:

- Raio da Terra: 6.380 km;
- Altura do satélite em relação à Terra: 400 km;
- Período da órbita do satélite: 92 min 24 s;
- A altura do astronauta em relação à Terra (sua órbita) no momento da ruptura do cabo corresponde a um aumento em seu período orbital de 0,12 s em relação ao período anterior, o do satélite em que estava.

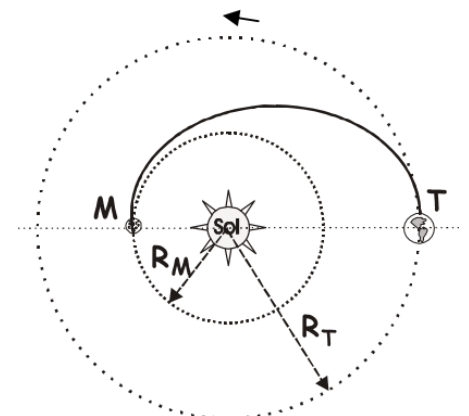
Obs: O satélite é um cilindro de 12 m de comprimento e 2,5 m de diâmetro e tem seu eixo contido na trajetória. No momento proposto no problema o astronauta se encontra na vertical que passa pelo ponto médio do corpo do satélite, portanto, você deverá levar em conta a composição diferencial de sua velocidade orbital em relação à do satélite para verificar um possível encontro.

Desenvolva o que se pede:

- Use a 3ª Lei de Kepler para encontrar a relação entre a mudança de período ( $\Delta P$ ) causada por uma mudança radial de distância ( $\Delta a$ ) de um corpo (satélite artificial) que orbita outro (Terra), considerando  $\Delta P$  e  $\Delta a$  numericamente muito pequenos comparados com  $P$  e  $a$ . Use isso para encontrar o afastamento do astronauta em relação ao satélite, depois do rompimento do cabo.
- Calcule as velocidades tangenciais do satélite e do astronauta (utilize três casas decimais).
- Verifique de quanto será o desvio, em relação ao meio do satélite, quando o astronauta conseguir alcançar a órbita do satélite, e se, nesse caso, ele poderia se ancorar nele.

**6) [A] (II OLAA)** Considere que os planetas Mercúrio e Terra orbitam no sentido anti-horário e em um mesmo plano ao redor do Sol com raios orbitais  $R_M$  e  $R_T$ , respectivamente. Da Terra, deseja-se lançar uma nave de tal forma que, movendo-se através de uma órbita elíptica, apenas por atração gravitacional, a nave atinja o planeta Mercúrio. Em função dos raios orbitais, da massa solar e da constante gravitacional, determine:

- A velocidade de lançamento da Terra que se deve impulsionar a nave.
- O tempo, em dias terrestres, que a nave leva para ir da Terra a Mercúrio seguindo esta órbita. Adote:  $R_M = 0,4$  UA e  $R_T = 1$  UA.

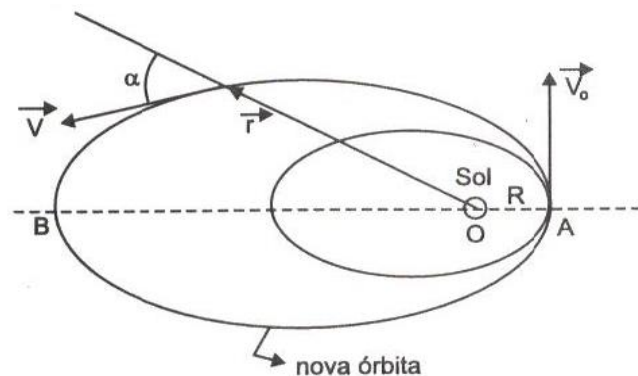


**7) [B] (seletiva)** Uma sonda lançada para Marte tem periélio e afélio sobre as órbitas da Terra e Marte respectivamente. Esse tipo de órbita é denominada ÓRBITA DE MÍNIMA ENERGIA, ou ÓRBITA DE TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN, nome dado em homenagem ao engenheiro alemão Walter Hohmann (1880-1945), que propôs a manobra em 1925. A sonda parte da órbita terrestre e alcança Marte quando chega a seu afélio. Durante o percurso é afetada apenas pela força gravitacional do Sol. As órbitas da Terra e Marte são consideradas coplanares. Considere que a equação da velocidade orbital para uma órbita elíptica é dada por :

$$v_s^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad \text{Onde } \mu = G.M$$

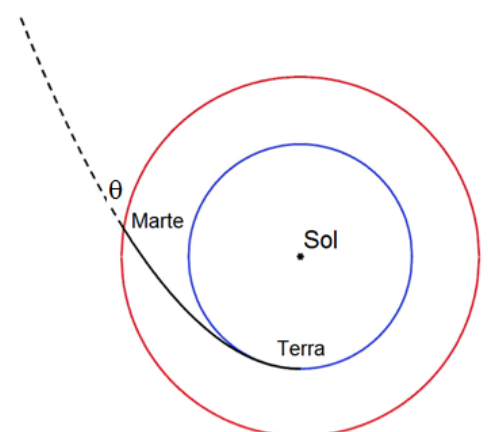
- Determine o semieixo maior e a excentricidade da órbita de transferência, sabendo que os raios das órbitas da Terra e de Marte, supostas circulares, são, respectivamente,  $R_T = 1$  UA e  $R_M = 1,5$  UA.
- Calcule a diferença de velocidade necessária para que a sonda percorra a trajetória desejada a partir de uma órbita circular de raio igual ao raio da órbita da Terra.
- Calcule o tempo de viagem entre a Terra e Marte.
- Calcule a diferença entre as longitudes eclípticas de Marte e Terra no instante do disparo dos foguetes para a injeção da sonda na órbita de transferência.

**8) [B]** Suponha um cenário de ficção científica em que a Terra é atingida por um imenso meteoro. Em consequência do impacto, somente o módulo da velocidade da Terra é alterado, sendo  $v_0$  seu valor imediatamente após o impacto, como mostra a figura abaixo.



O meteoro colide com a Terra exatamente na posição onde a distância entre a Terra e o Sol é mínima. Considere a atração gravitacional exercida pelo Sol, tido como referencial inercial, como única força de interação que atua sobre a Terra após a colisão,  $M$  a massa do Sol e  $G$  a constante da gravitação universal. Considere que o momento angular da Terra, de massa  $m$ , é conservado. Determine a distância (OB), do apogeu ao centro do Sol, da trajetória que a Terra passa a percorrer após o choque com o meteoro.

**9) [C] (4th IOAA)** Uma nave espacial é lançada da Terra e rapidamente é acelerada para sua máxima velocidade, de tal forma que sua órbita é uma parábola com o Sol no foco e tangenciando a órbita terrestre. Considere que as órbitas da Terra e de Marte são círculos no mesmo plano, com raios iguais a  $R_T = 1,0$  UA e  $R_M = 1,5$  UA, respectivamente. Durante a viagem somente a gravidade do Sol deve ser considerada. A figura abaixo mostra a trajetória da nave espacial, fora de escala, vista do polo norte eclíptico. O círculo interno é a órbita da Terra e o círculo externo é a órbita de Marte. Determine o ângulo  $\theta$  entre a órbita da nave espacial e da órbita de Marte, como visto na figura, quando a nave cruza a órbita de Marte. Não considere o efeito gravitacional de Marte.



**10) [C] (2nd IOAA)** Considere um objeto orbitando a Terra apenas sob influência da sua força gravitacional. Sendo  $u$  o inverso da distância entre o objeto e o centro da Terra e  $p$  a intensidade do seu momento linear, quando o objeto viaja entre os pontos A e B, cujos valores  $u$  e  $p$  são mostrados na tabela abaixo:

Nestas condições, determine:

- a massa do objeto.
- a sua energia total.
- esboce a curva  $u$  em função de  $p$  no trecho de A até B.

	$p(10^9 \text{ kg.m.s}^{-1})$	$u(10^{-8} \text{ m}^{-1})$
A	0,052	5,15
B	1,94	194,17

**11) [C] (4th IOAA)** O planeta Taris hospeda a civilização Korribiana. A espécie Korribiana é uma forma de vida alienígena inteligente. Eles falam Korribianês. O dicionário Korribianês-Português segue abaixo. Dê uma lida. Os astrônomos Korribianeses têm estudado o céu por milhares de anos. Seu conhecimento pode ser resumido como segue:

- Taris orbita sua estrela Sola em uma órbita circular, a uma distância de 1 Taris-comprimento.
- Taris orbita Sola em 1 Taris-ano.
- A inclinação do equador de Taris em relação ao seu plano orbital é de  $3^\circ$ .
- Há exatamente 10 Taris-dias em 1 Taris-ano.
- Taris tem duas luas, chamadas Endor e Extor. Ambas têm órbitas circulares.
- O período sideral orbital de Endor, ao redor de Taris, é exatamente 0,2 Taris-dias.
- O período sideral orbital de Extor, ao redor de Taris, é exatamente 1,6 Taris-dias.
- A distância entre Taris e Endor é 1 Endor-comprimento.
- Corulus, outro planeta, também orbita Sola em uma órbita circular. Corulus tem uma lua.
- A distância entre Sola e Corulus é de 9 Taris-comprimento.
- O ano Tarisiano começa quando a longitude Soláptica de Sola é zero.

Korribianês	Tradução
Corulus	Um planeta orbitando Sola
Endor	(i) Deusa da noite (ii) uma lua de Taris.
Endor-comprimento	Distância entre Taris e Endor.
Extor	(i) Deus da paz; (ii) uma lua de Taris.
Sola	(i) Deus da vida; (ii) A estrela que Taris e Corulus orbitam.
Soláptica	Caminho aparente de Sola e Corulus como vistos por Taris.
Taris	Um planeta orbitando a estrela Sola, berço da civilização Taris Korribiana.
Taris-dia	O tempo entre duas meias-noites sucessivas no planeta Taris.
Taris-comprimento	A distância entre Sola e Taris.
Taris-ano	Tempo que Taris leva para dar uma volta ao redor de Sola.

- Quantas vezes Taris gira ao redor de seu eixo durante um Taris-ano?
- Qual a distância entre Taris e Extor, em Endor-comprimentos?
- Qual o período orbital de Corulus, em Taris-anos?
- Qual a distância entre Taris e Corulus, quando Corulus está em oposição?
- Se, no começo de um Taris-ano particular, Corulus e Taris estavam em oposição, qual seria a longitude Soláptica (observada de Taris) de Corulus 'n' Taris-dias após o início do Taris-ano?
- Qual é a área do triângulo formado por Sola, Taris e Corulus exatamente um Taris-dia após a oposição?



**12) [B]** Uma estrela supergigante vermelha na constelação de escorpião possui massa de  $15,5 M_{\text{Sol}}$  e raio de  $700 R_{\text{Sol}}$ . Supondo que no final de sua vida ela se transforme em uma estrela com massa de  $4 M_{\text{Sol}}$  e  $4 \cdot 10^5 \text{ km}$  de raio, calcule sua nova frequência de rotação sabendo que a velocidade de rotação inicial é  $3,4 \text{ km/s}$ . Considere que a estrela é esférica nos dois estágios e que não houve perdas de momento angular.

**13) [A] (VI OLAA)** A estrela Sirius tem um magnitude aparente  $-1,5$  e se encontra a uma distância de  $2,6 \text{ pc}$ . Sabe-se ainda, que se trata de uma estrela de tipo espectral A1 com uma temperatura superficial de  $10\,000 \text{ K}$ .

- Calcule a magnitude absoluta de Sirius.
- Calcule a luminosidade de Sirius em relação ao Sol, sabendo que a magnitude absoluta do Sol é  $4,82$ .
- Calcule o raio de Sirius em relação ao raio do Sol sabendo que a temperatura superficial do Sol é  $5800 \text{ K}$ .

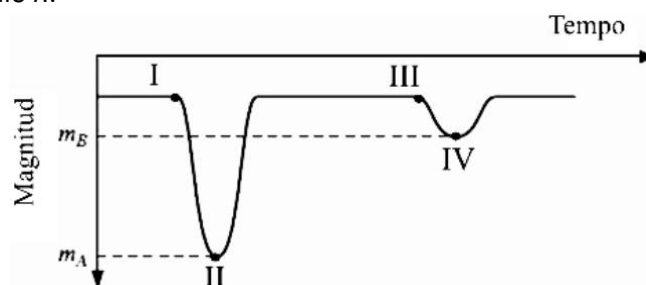
**14) [A] (seletiva)** Uma estrela da sequência principal que se encontra a  $30 \text{ pc}$  de distância da Terra possui magnitude bolométrica aparente de  $4,0$ . Quando essa estrela sair da sequência principal, irá mudar sua posição no diagrama HR para o ramo das gigantes, o que acarretará numa diminuição de 4 vezes de sua temperatura. Ao mesmo tempo, seu raio irá aumentar 150 vezes. Em função dessas informações, responda:

- Qual deveria ser uma nova distância para esta estrela, de maneira a fazer com que ela mantenha sua magnitude bolométrica aparente inalterada?
- Suponha que a estrela do item anterior possua massa de  $8,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  e luminosidade de  $6,0 \cdot 10^{28} \text{ W}$ . Suponha ainda que  $0,9\%$  da massa total inicial da estrela pudesse ser transformada em energia, durante a vida inteira da estrela. Estime então o tempo máximo de vida dessa estrela, assumindo que sua luminosidade permaneça sempre constante.

**15) [A] (seletiva)** Em um sistema binário, a magnitude aparente da estrela principal vale  $2,0$  e da estrela secundária vale  $3,0$ . Calcule a magnitude combinada máxima para o sistema.

**16) [A] (3rd IOAA)** Estime o número de fótons por segundo que chega ao olho de um observador com pupila de diâmetro  $d = 6 \text{ mm}$  vindo de uma estrela tipo G2V com magnitude aparente  $6$  (limite da visão humana). Assuma que toda a radiação desta estrela está em  $\lambda = 550 \text{ nm}$  (visível). Adote:  $M_{\text{Sol}} = -26,8$ ;  $F_{\text{Sol}} = 1,37 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$ ;  $h = 6,64 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ;  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .

**17) [B] (VI OLAA)** A figura mostra a curva de luz de uma binária eclipsante tipo Algol, cujo plano orbital está na direção da linha de visada. Indicam-se as magnitudes aparentes,  $m_A$  e  $m_B$ , correspondentes aos mínimos primário e secundário da curva de luz, respectivamente. A profundidade de cada mínimo  $\Delta mag$  é definido como a diferença entre a magnitude aparente  $m_A$  ou  $m_B$  e a magnitude aparente total da binária  $m_{\text{tot}}$  (quando não há eclipse). Sejam  $T_B$  e  $T_A$  as temperaturas efetivas da componente mais brilhante e da componente mais débil, respectivamente. As duas componentes têm o mesmo raio  $R$ .



- Faça um esquema das posições relativas entre as duas componentes do sistema, com respeito ao observador, correspondentes aos seguintes pontos da curva de luz: I - imediatamente antes que se comece a produzir o mínimo primário, II - quando se alcança o mínimo primário, III - imediatamente antes que se comece o mínimo secundário e IV - quando se alcança o mínimo secundário. Indique claramente qual é a estrela A e qual é a B.
- Encontre uma expressão que relacione a profundidade de cada mínimo da curva de luz com a luminosidade total da binária ( $L_{\text{tot}}$ ) e a luminosidade individual de cada componente ( $L_A$ ,  $L_B$ ).
- Sabendo que as temperaturas efetivas das componentes são  $T_B = 12\,000 \text{ K}$  e  $T_A = 5\,000 \text{ K}$ , calcule a profundidade  $\Delta mag$  de cada mínimo.

**18) [A]** No espectro de Aldebaran ( $\alpha$ -Tauris) se observa para a linha de Na I (átomo de sódio ionizado) com  $\lambda_0 = 5890.10^{-10}$  m um deslocamento de  $\Delta\lambda = 1,062.10^{-10}$  m. Se suas magnitudes visuais aparentes e absolutas são  $m_{V\alpha} = + 0,85$  e  $M_{V\alpha} = - 0,63$  e a magnitude limite do olho humano é  $m_H = + 6$ , calcule o tempo que levará Aldebaran para deixar de ser visível da Terra sem a ajuda de um telescópio.

*Dados:*  $1 \text{ pc} = 3,086.10^{13} \text{ km}$ ;  $1 \text{ ano} = 3,154.10^7 \text{ s}$ .

**19) [A]** A super gigante azul Naos ( $\zeta$ -Puppis) é a estrela mais brilhante da constelação da Popa e possui temperatura efetiva igual a  $T_{\text{ef}} = 42\,000 \text{ K}$ .

*Dados:* Magnitude visual absoluta de Naos:  $M_V = - 5,96$ ; Correção bolométrica de Naos: C.B. = 4,04.

a) Determine o comprimento de onda máximo,  $\lambda_{\text{máx}}$ , de emissão de Naos considerando que se comporta como um corpo negro.

b) Determine a fração de energia irradiada por esta estrela na região visível.

**Comentário:** A correção bolométrica (C.B.) é definida como a diferença entre as magnitudes visual e bolométrica de um astro, ou seja,  $C.B. = M_V - M_B$ . Enquanto a magnitude visual considera apenas a região visível do espectro, a magnitude bolométrica considera todo o espectro.

**20) [B]** A estrela Minelava ( $\delta$ -Virginis) é uma gigante vermelha da constelação de Virgem com massa igual a 2 massas solares. Possui magnitude visual absoluta  $M_V = - 0,58$  e C.B. = 1,68. Determine a densidade de Minelava, em densidades solares, sabendo que sua temperatura efetiva é  $T_{\text{ef}} = 3\,720 \text{ K}$ .

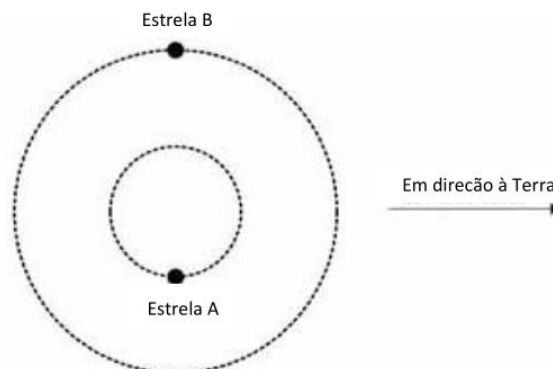
*Dados:* Magnitude absoluta bolométrica do Sol = + 4,74; luminosidade bolométrica do Sol =  $3,486.10^{26} \text{ W}$ .

**21) [A]** (*VOLAA*) Em um sistema binário, as estrelas orbitam ao redor de um ponto comum. A luz de ambas é observada na Terra. Assuma que ambas emitem uma luz com comprimento de onda de  $6,58.10^{-7} \text{ m}$ .

a) Quando as estrelas estão na configuração mostrada na figura abaixo, o observador na Terra mede um comprimento de  $6,58.10^{-7} \text{ m}$  onda para ambas. Explique porque não existe efeito Doppler neste caso.

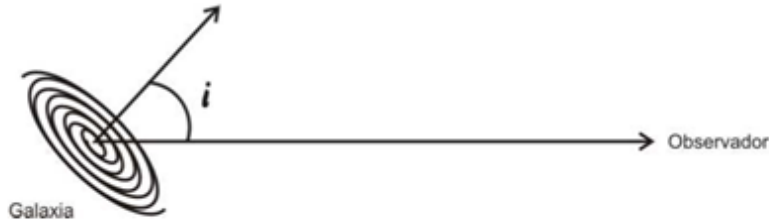


b) Quando as estrelas estão nas posições mostradas na figura a seguir, o observador na Terra mede dois comprimentos de onda:  $6,50.10^{-7} \text{ m}$  para a estrela A e  $6,76.10^{-7} \text{ m}$  para a estrela B. Determine a velocidade das estrelas e indique qual está se distanciando e qual está se aproximando.



**22) [B] (VII OLAA)** O desvio para o vermelho (*redshift*) observado do Objeto Quasi-Estelar (QSO) LBQS 0042-2550 é  $z = 0,13$ . Estime sua distância e quanto tempo sua luz demorou a chegar até nós. *Dado:*  $H_0 = 67,80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

**23) [B] (V OLAA)** Estudantes olímpicos observaram uma galáxia espiral NGC OLAA, cujos parâmetros são mostrados no quadro abaixo. Foi medido o comprimento de onda do centro do disco da galáxia, centrado na linha de emissão  $H\alpha$  ( $6562,80 \text{ \AA}$ ):



Galáxia	Tamanho angular	Distância ( $10^6 \text{ al}$ )	$\lambda_{\text{observado}} (\text{\AA})$
NGC OLAA	$3,20^\circ \times 1,0^\circ$	2,5	6556,22

- Determine o diâmetro da galáxia em anos-luz assumindo que seu disco é completamente circular e que os valores observados são os dados na tabela.
- Determine a inclinação ( $i$ ) normal ao disco com respeito a linha de visada.
- Determine a velocidade de recessão desta galáxia e o módulo do parâmetro  $z$ .
- Determine a magnitude absoluta da galáxia assumindo que sua magnitude aparente é 4,36.
- Será possível observar esta Galáxia com um telescópio LX200 de  $8''$  (8 polegadas) Schmidt-Cassegrain? Justifique sua resposta, mediante ao cálculo da magnitude limite deste telescópio.

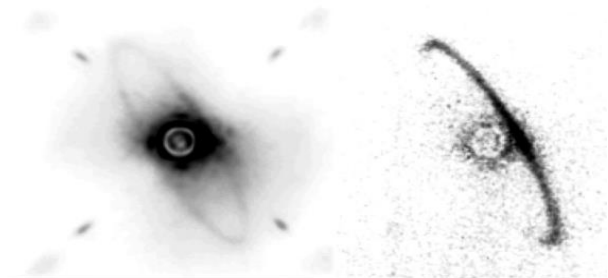
**Comentário:** A magnitude limite de um telescópio é dada por:  $m_{\text{lim}} = 7,1 + 5 \log d$ ; onde  $d$  é o diâmetro da objetiva em cm. Adote:  $1'' = 2,54 \text{ cm}$ .

**24) [A] (4th IOAA)** Uma cratera na superfície da Lua possui diâmetro igual a 80 km. Justifique, através de argumentos físicos e matemáticos, se é possível observar esta cratera a olho nu.

*Adote:* Diâmetro da pupila humana = 5 mm; distância Terra-Lua 384 400 km; comprimento de onda médio da radiação visível = 500 nm.

**25) [A] (4th IOAA)** Acredita-se que o centro galáctico possui um buraco negro supermassivo, de massa  $M = 4 \cdot 10^6 M_{\text{Sol}}$ . A comunidade astronômica está tentando distinguir seu horizonte de eventos. Para um buraco negro sem rotação, o horizonte de eventos tem o mesmo valor do raio de Schwarzschild, ou seja,  $R_{\text{Sch}} = 3 \cdot (M/M_{\text{Sol}})$ , com  $R_{\text{Sch}}$  em km. Assumindo que temos um telescópio do tamanho da Terra, quais os comprimentos de onda deveríamos usar para distinguir o horizonte de eventos deste buraco negro? Considere que o Sol está a 8,5 kpc do centro da Galáxia.

**26) [A] (VI OLAA)** Há muito se tem observado que certas estrelas apresentam um excesso de emissão de radiação no infravermelho e que isso pode indicar a presença de um disco, anéis de poeira, ou asteroides ao redor das mesmas. Com telescópios convencionais, não é possível observar diretamente esses discos devido a atmosfera que reduz o poder de resolução desses telescópios. Contudo, novas tecnologias, como a óptica adaptativa extrema, permitem, agora, observar diretamente tais discos e até obter imagens de planetas em torno de outras estrelas. A óptica adaptativa extrema permite que os grandes telescópios cheguem ao limite teórico de seu poder de resolução.



*Imagem do anel no sistema HR4796 com óptica adaptativa extrema em  $\lambda = 1,6 \times 10^{-6} \text{ m}$ . A luz da estrela foi removida da imagem.*

Imagine que há um anel de raio 10 UA ao redor de uma estrela a 25 pc de distância do Sol, como mostra a figura.

- a) Encontre a distância angular ( $\alpha$ ) a qual se veria, a partir da Terra, o raio do anel.  
 b) Encontre o poder de resolução ( $\theta$ ) do telescópio Gemini Sul, de 8,1 m de diâmetro, no comprimento de onda  $\lambda = 1,6 \times 10^{-6}$  m e responda se o anel é observável no referido comprimento de onda utilizando óptica adaptativa extrema.

## Soluções: Astronomia

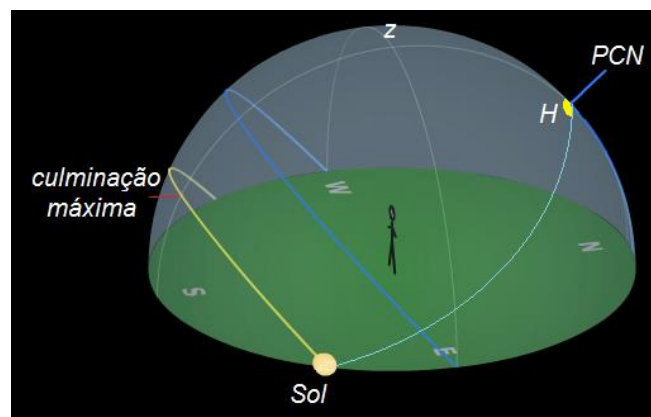
### 1) Alternativa A

O dia 20/mar/2014 será dia de equinócio. O Sol nascerá no ponto cardinal Leste, e sua declinação será de  $0^\circ$ . Como as duas cidades se encontram dentro do mesmo fuso horário, a diferença de longitudes é então o que determina a diferença de horário de nascer do Sol entre elas nesse dia. Bertioga está a leste de São Paulo, e portanto o Sol nascerá mais cedo em Bertioga. A diferença de longitude é de  $0,5^\circ$ , o que equivale a uma diferença de 2 minutos de tempo ( $24\text{h} = 360^\circ$ ). Assim, o horário de nascer do Sol será de, aproximadamente, 6h 08min em Bertioga.

### 2) Alternativa B

São Paulo e Sydney estão em fusos horários diferentes. O fuso a que Sydney pertence tem meridiano central a  $150^\circ$  Leste de Greenwich, o que corresponde a uma diferença de +10h em relação ao GMT. O meridiano central do fuso de São Paulo está a  $45^\circ$  Oeste, o que corresponde a uma diferença de -3h em relação ao GMT. O horário de nascer do Sol em ambos os meridianos centrais é aproximadamente o mesmo. Assim, a diferença de horário de nascer do Sol entre São Paulo e Sydney é igual à diferença de horário de nascer do Sol entre São Paulo e o meridiano central de seu fuso somada à diferença de horário de nascer do Sol entre Sydney e o meridiano central de seu fuso. São Paulo se encontra a  $1,6^\circ$  Oeste do meridiano central de seu fuso. O Sol nasce então 6min24s mais cedo no meridiano central, ou seja, às 06h10min12s – 06min24s = 06h03min48s. Sydney se encontra a  $1,2^\circ$  Leste do meridiano central de seu fuso. O Sol nasce então 4min48s mais cedo em Sydney em relação ao meridiano central, ou seja, 06h03min48s – 4min48s = 05h59min.

- 3) Representando o nascer do Sol no dia 21/dez ( $\delta_{\text{sol}} = -23,5^\circ$ ) na latitude indicada ( $\varphi = 42,5^\circ$  N), temos:



Neste instante, o ângulo horário do Sol (H) será dado por:

$$\cos H = -\text{tg} \delta \cdot \text{tg} \varphi \Rightarrow H = 66,5^\circ$$

Logo, o intervalo de tempo para o Sol atingir a culminação máxima será:

$$\Delta t = \frac{24\text{h}}{360^\circ} \cdot 66,5 = 4\text{h}26\text{min}$$

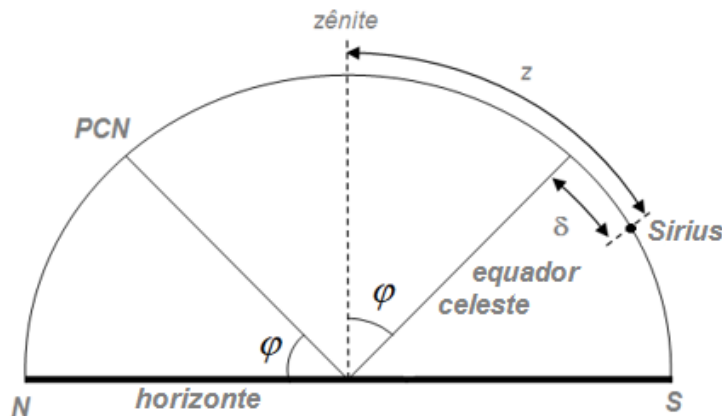
Já o tempo  $t$  que o Sol atinge a culminação máxima para o observador na longitude  $\lambda = 71^\circ$  W, ou seja,  $4^\circ$  a oeste ao meridiano central  $75^\circ$  W, admitindo que o Sol cruze o meridiano central nesta data às 12h, será:

$$t = 12h - \frac{1h}{15^\circ} \cdot 4^\circ = 11h44min$$

Portanto, a hora que o Sol nasce no dia 21/dez é:

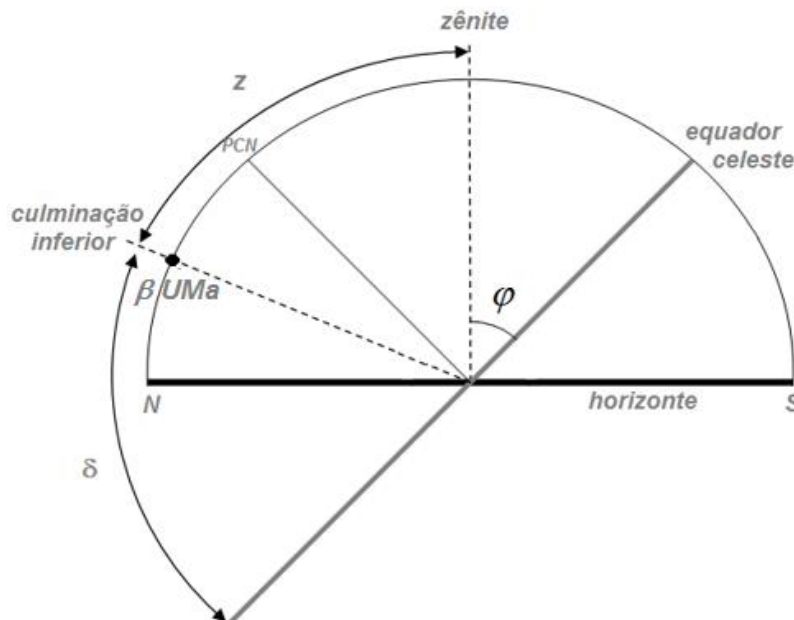
$$T_{nascer} = 11h44min - 4h26min \Rightarrow T_{nascer} = 7h18min$$

4) A latitude local  $\varphi$  coincide com a elevação, em relação ao horizonte, do polo celeste visível que neste caso é o polo celeste norte (PCN). Sabendo que o plano do equador celeste que é perpendicular ao eixo contém o PCN (eixo de rotação da esfera celeste), temos:



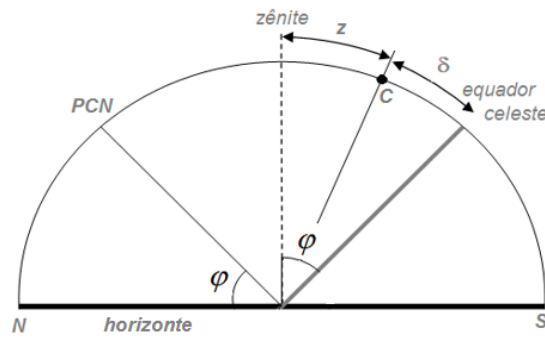
$$\varphi = z - |\delta| = 39^\circ 05' 34,4'' - 16^\circ 43' 24,6'' \Rightarrow \varphi = 22^\circ 22' 9,8'' N$$

5) Como a declinação de  $\beta$  Ursa Majoris ( $\beta$  UMa) é positiva, a estrela pertence ao hemisfério celeste norte. Representando o instante de culminação inferior, a latitude  $\varphi$  será dada por:



$$\varphi = 180^\circ - (z + \delta) = 180^\circ - (63^\circ 46' + 74^\circ 31') \Rightarrow \varphi = 41^\circ 43' N$$

6) endo C a posição do cometa ao cruzar o meridiano local, o que implica possuir ângulo horário (H) igual a zero, as coordenadas equatoriais serão dadas por:



Declinação ( $\delta$ ):

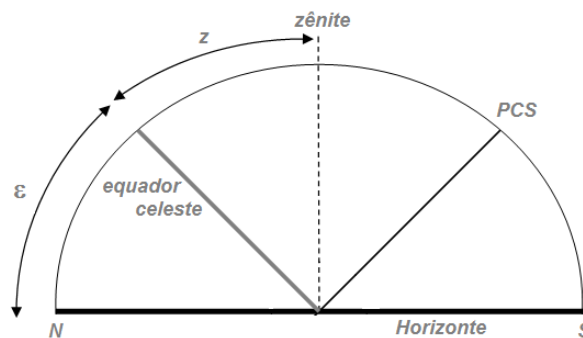
$$\delta = \varphi - z = 50^{\circ}27' - 3^{\circ}52' \Rightarrow \delta = 46^{\circ}35'$$

Ascensão Reta ( $\alpha$ ):

$$T_{SL} = H + \alpha \Rightarrow 15h15min10s = 0 + \alpha \Rightarrow \alpha = 15h15min10s$$

7) a) Como a estrela descreveu um arco de  $180^{\circ}$  acima do horizonte desde o instante do nascer até seu ocaso ela está sobre o equador celeste, ou seja, sua declinação é  $\delta = 0^{\circ}$ .

b) Sendo  $\varepsilon$  o ângulo entre o plano do equador celeste e o plano do horizonte, temos:



$$\varepsilon = 90^{\circ} - z = 90^{\circ} - 55^{\circ} \Rightarrow \varepsilon = 35^{\circ}$$

8) Considerando o instante que as estrelas A e B cruzam o meridiano local ( $H = 0$ ), temos:

Declinação;

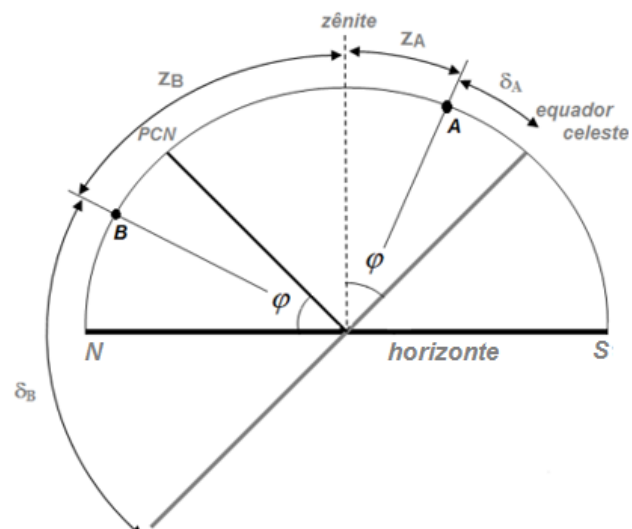
$$\delta_A = \varphi - z_A = 55^{\circ}45' - 40^{\circ} \Rightarrow \delta_A = 15^{\circ}45'$$

$$\delta_B = 180^{\circ} - (\varphi + z_B) = 180^{\circ} - (55^{\circ}45' + 40^{\circ}) \Rightarrow \delta_B = 84^{\circ}15'$$

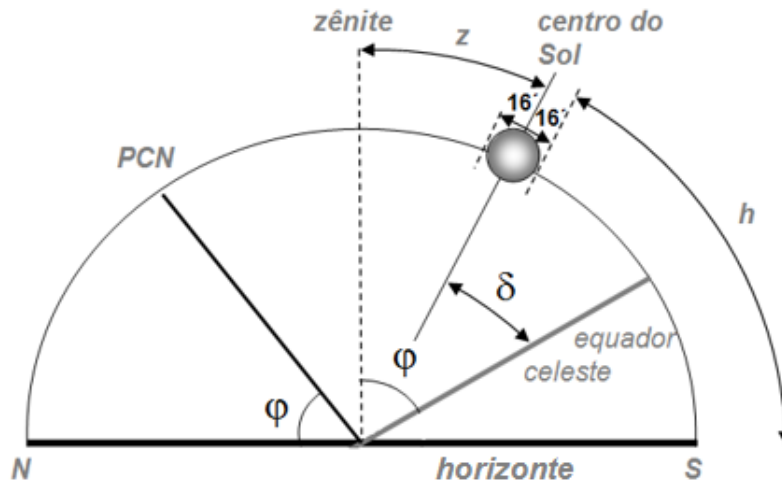
Ascensão reta:

$$T_{SLA} = H + \alpha_A \Rightarrow \alpha_A = 7h35min$$

$$T_{SLB} = (H + \alpha_B) + 12h \Rightarrow \alpha_B = 19h35min$$

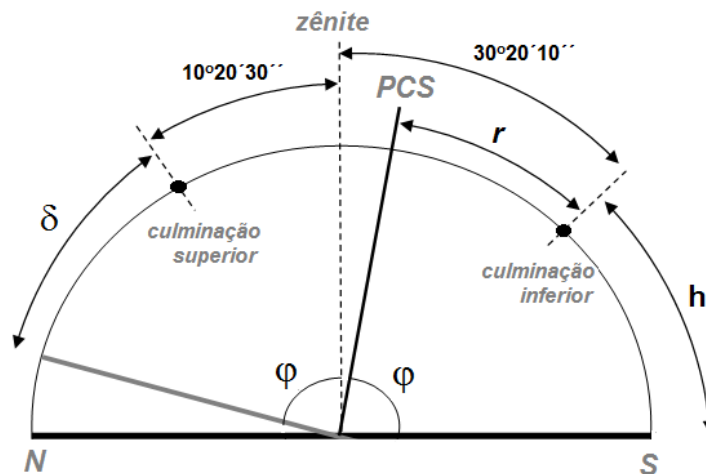


9) Considerando  $h$  a altura do bordo inferior do Sol neste instante, temos:



$$\begin{cases} z + 16' + h = 90^\circ \\ \varphi = z + \delta \end{cases} \Rightarrow \varphi = (90^\circ - 16' - 84^\circ 21') + 18^\circ 39' \Rightarrow \varphi = 24^\circ 02' N$$

10) Esquematicamente, temos:



O polo celeste visível (PCS) é equidistante dos pontos de culminação. Portanto, a distância angular  $r$  pode ser determinada por:

$$r = \frac{10^\circ 20' 30'' + 30^\circ 20' 10''}{2} \Rightarrow r = 20^\circ 20' 20''$$

Sendo  $h_i$  a altura da estrela na situação de culminação inferior, o módulo da latitude local  $|\varphi|$  será:

$$\begin{cases} |\varphi| = r + h_i \\ h_i = 90^\circ - 30^\circ 20' 10'' \end{cases} \Rightarrow |\varphi| = 20^\circ 20' 20'' + 59^\circ 39' 50'' \Rightarrow |\varphi| = 80^\circ 0' 10''$$

Como a observação foi realizada em um ponto do hemisfério Sul, temos que  $\varphi = -80^\circ 0' 10''$  ou  $\varphi = 80^\circ 0' 10'' S$ .

Já o módulo da declinação  $|\delta|$  é:

$$|\delta| = |\varphi| - 10^\circ 20' 30'' \Rightarrow |\delta| = 69^\circ 39' 40''$$

Sendo uma estrela pertencente ao hemisfério celeste sul, temos que  $\delta = -69^\circ 39' 40''$ .

11) O tempo sideral para o observador em Bogotá ( $T_{SL}$ ), que está a oeste de Greenwich, é dado por:

$$T_{SL} = T_{SG} - \lambda \Rightarrow T_{SL} = 12h30min - \frac{1h}{15^\circ} \cdot 74^\circ 05' \Rightarrow \\ \Rightarrow T_{SL} = 7h33min 40s$$

Logo, a ascensão reta  $\alpha$  da estrela é:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{SL} = H + \alpha \\ H = 45^\circ 30' = 3h02min \end{array} \right. \Rightarrow 7h33min 40s = 3h02min + \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha = 4h31min 40s$$

12) a) O Sol está cruzando o meridiano local mais próximo ao ponto cardinal Norte, logo  $A = 0^\circ$ .

b) No solstício de junho a declinação do Sol é aproximadamente  $\delta = +23^\circ 27'$ .

c) Como o Sol está cruzando o meridiano local, o ângulo horário é  $H = 0$ .

d) A altura  $h$  do Sol será dada por:

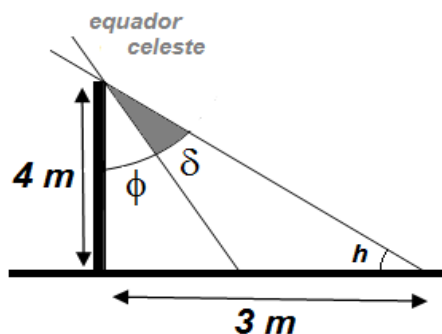
$$\operatorname{tg} h = \frac{4}{3} \Rightarrow h = 53^\circ 7' 48,4''$$

e) No solstício de junho a ascensão reta do Sol é  $\alpha = 6h$ .

f) O tempo sideral local será:

$$T_{SL} = H + \alpha \Rightarrow T_{SL} = 6h$$

g) Analisando a figura, temos que a latitude  $\phi$  será:



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\phi + \delta) = \frac{3}{4} \\ \delta = 23^\circ 27' \end{array} \right. \Rightarrow \phi = 13^\circ 25' 12'' S$$

13) a) Serão todas as estrelas que possuem declinação menor do que zero ( $\delta < 0$ ), ou seja: Peacock, Rigel e Achernar.

b) Para não ser visível em Santiago, a estrela deve possuir declinação maior que  $57^\circ$  ( $\delta > +57^\circ$ ). São elas: Alderamin e Polaris.

c) Para ser circumpolar em Montevideo, a estrela deve possuir declinação menor que  $-55^\circ$  ( $\delta < -55^\circ$ ). São elas: Peacock e Achernar.

d) Para fazer passagem meridiana próxima ao zênite na Cidade do México, a declinação da estrela deve ser próxima de  $19^\circ$  ( $\delta \approx 19^\circ$ ), o que se verifica para Algeiba e Arcturus.

e) O Rio de Janeiro está a  $2^\circ$  a oeste do meridiano central  $45^\circ W$ , portanto a hora sideral do cruzamento da estrela deve ser  $t = 2h30min - \frac{60min}{15^\circ} \cdot 2^\circ = 2h22min$ . No dia 21 de março ( $\delta_{Sol} = 0^\circ$  e  $AR_{Sol} = 0^\circ$ ) o ângulo horário do

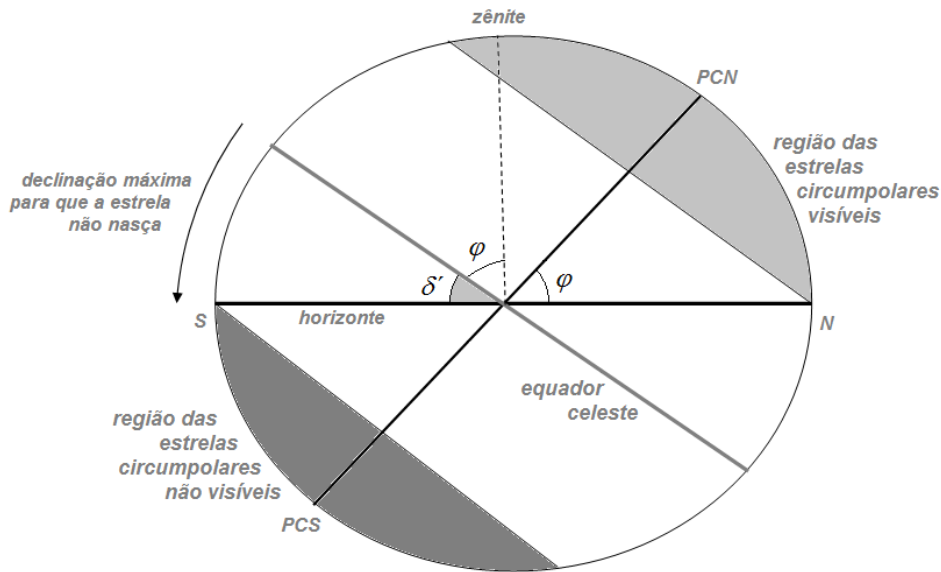


ponto vernal (tempo sideral local  $T_{SL}$ ) neste instante é  $T_{SL} = 12h + 2h22min = 14h22min$ . Para a estrela fazer passagem meridiana ( $H = 0$ ) neste instante, sua ascensão reta  $AR$  deve ser:

$$T_{SL} = H + AR \Rightarrow AR = 14h22min$$

O que mais se aproxima a coordenada de Arcturus.

**14)** Para uma estrela não nascer na Cracóvia ( $\varphi = 51^\circ N$ ), ela deve pertencer ao hemisfério celeste Sul ( $\delta < 0$ ) e sua declinação ( $\delta'$ ) deve ser:



$$|\delta'| \leq 90^\circ - \varphi \Rightarrow |\delta'| \leq 90^\circ - 50,1^\circ \Rightarrow \delta' \leq -39,9^\circ$$

- Para Sirius:

Considerando a maior variação possível da declinação desta estrela ( $47^\circ$ ), causada pela precessão do eixo da Terra a partir da data atual ( $\delta_{S\text{ atual}} = -16^\circ 43'$ ), a declinação mínima possível de Sirius ( $\delta_{S\text{ mínima}}$ ) é:

$$\delta_{S\text{ mínima}} = -16^\circ 43' - 47^\circ \Rightarrow \delta_{S\text{ mínima}} = -63^\circ 43' \text{ ou } -63,72^\circ$$

Como existe  $\delta_{S\text{ mínima}} \leq \delta'$ , é possível criar uma situação que Sirius não nasça na Cracóvia.

- Para Canopus.

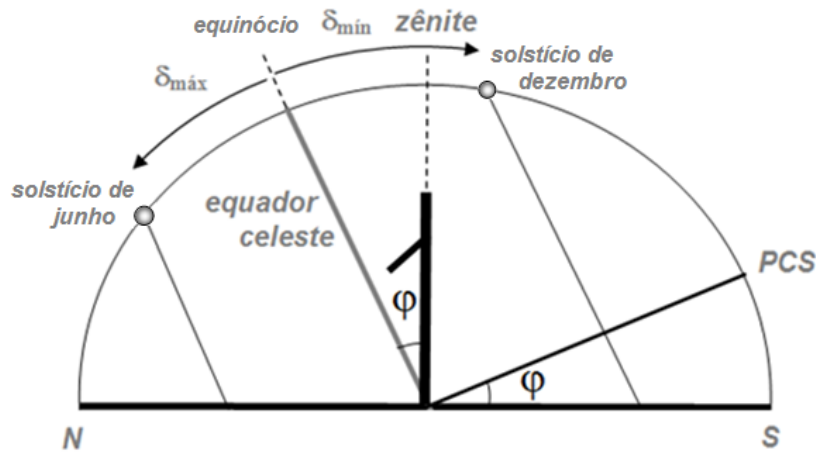
Impondo a situação limite para que Sirius não nasça ( $\delta_{S\text{ máxima}} = -39,9^\circ$ ) e a precessão do eixo da Terra correspondente ( $\Delta\delta_{\text{precessão}}$ ), temos que nesta situação a declinação de Canopus ( $\delta_{\text{Canopus}}$ ) será:

$$\begin{aligned} \left| \begin{aligned} \delta_{\text{Canopus}} &= \delta_{C\text{ atual}} + \Delta\delta_{\text{precessão}} \\ \Delta\delta_{\text{precessão}} &= \delta_{S\text{ máxima}} - \delta_{S\text{ atual}} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} \delta_{\text{Canopus}} &= -52^\circ 42' + \Delta\delta_{\text{precessão}} \\ \Delta\delta_{\text{precessão}} &= -39,9^\circ - (-16^\circ 43') \end{aligned} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta_{\text{Canopus}} &= -75,9^\circ \end{aligned}$$

O que significa que Canopus também não irá nascer ( $\delta_{\text{Canopus}} \leq \delta'$ ).

Portanto, não é possível uma situação na Cracóvia que Sirius não nasça e Canopus nasça e se ponha.

15) Representando o movimento anual do Sol ao cruzar o meridiano local no Observatório Nacional do Brasil ( $\varphi = 22^{\circ}54'S$ ), temos;



Onde  $\delta_{min} = -23^{\circ}27'$  e  $\delta_{máx} = +23^{\circ}27'$  são as declinações do Sol no solstício de dezembro e junho respectivamente.

a) Para declinações entre o equinócio de setembro ( $\delta_{sol} = 0^{\circ}$ ) e o solstício de dezembro, em pelo menos uma parte do dia o relógio de Sol não irá funcionar, então:

$$-23^{\circ}27' \leq \delta < 0^{\circ}$$

b) Para declinações entre o instante que o Sol cruza o zênite ( $\delta_{sol} = \varphi$ ) até o solstício de dezembro, o relógio não irá funcionar o dia todo, logo:

$$\delta_{min} \leq \delta < \varphi \Rightarrow -23^{\circ}27' \leq \delta < -22^{\circ}54'$$

16) Alternativa B

Considerando o período orbital da Terra 365 dias, o período orbital de Vênus  $T_V$  será:

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_T} \Rightarrow \frac{1}{584} = \frac{1}{T_V} - \frac{1}{365} \Rightarrow T_V = 224,6 \text{ dias}$$

Já o período orbital de Júpiter:

$$\frac{1}{\Delta t'} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_J} \Rightarrow \frac{1}{399} = \frac{1}{365} - \frac{1}{T_J} \Rightarrow T_J = 4283,4 \text{ dias}$$

Logo, o período sinódico de Júpiter tendo o Sol e Vênus como referências é aproximadamente:

$$\frac{1}{\Delta t''} = \frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_J} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t''} = \frac{1}{224,6} - \frac{1}{4283,4} \Rightarrow \Delta t'' = 237 \text{ dias}$$

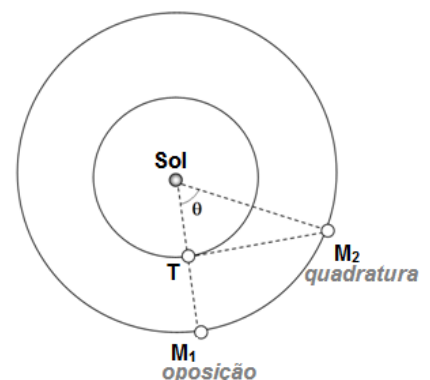
17) O período sinódico de Marte tendo a Terra e o Sol como referências é:

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{365} - \frac{1}{687} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = 779 \text{ dias}$$

Logo, o ângulo  $\theta$  entre as duas situações é:

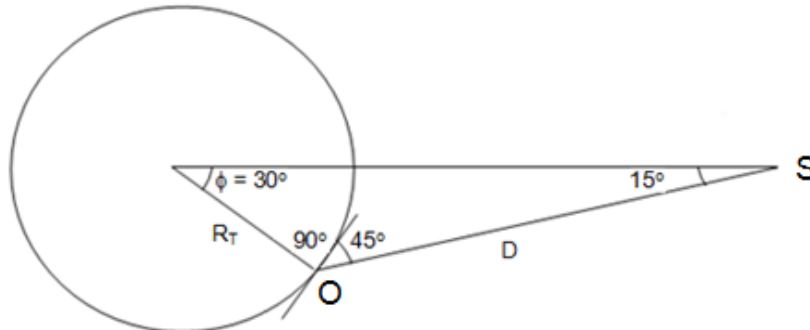
$$\theta = \frac{360^{\circ}}{779 \text{ dias}} \cdot 106 \text{ dias} = 49^{\circ}$$



Chamando de  $a_T$  a distância Terra-Sol e  $a_M$  a distância Marte-Sol, da situação de quadratura, temos:

$$\cos \theta = \frac{a_T}{a_M} \Rightarrow \cos 49^\circ = \frac{1UA}{a_M} \Rightarrow a_M = 1,52UA$$

18) Representando a situação vista do espaço, onde O é a posição do observador e S é a posição do satélite, temos:



Logo, a distância D entre o satélite e o observador, pode ser obtida através da lei dos senos:

$$\frac{D}{\sin 30^\circ} = \frac{R_T}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \frac{D}{0,5} = \frac{6400}{0,2588} \Rightarrow D = 12364km$$

19) Considerando a massa de Phobos muito menor que a massa de Marte, da 3ª lei de Kepler temos que o período orbital de Phobos  $T_P$  é:

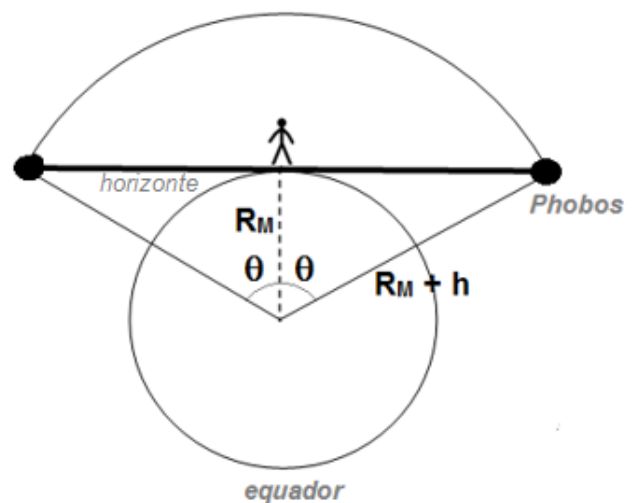
$$\frac{T_P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Marte}} \Rightarrow \frac{T_P^2}{(R_M + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Marte}} \Rightarrow T_P = 7,66h$$

Já o período sinódico de Phobos  $T_S$ , tendo Marte e um observador em sua superfície como referência, será:

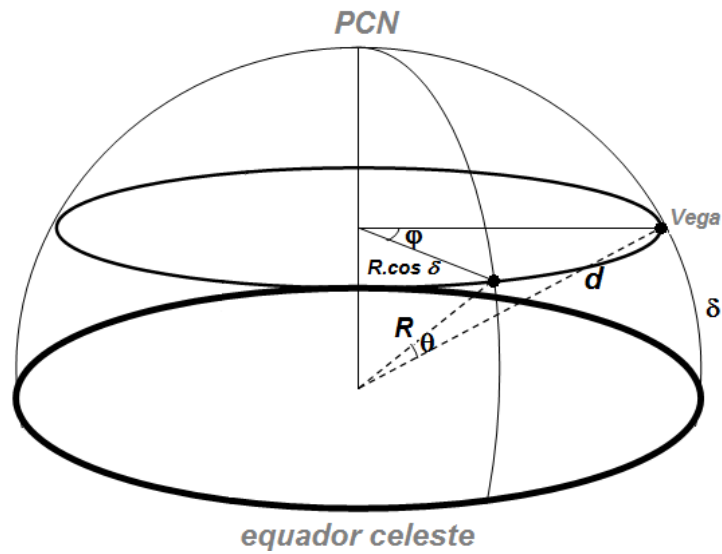
$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_P} - \frac{1}{T_M} \Rightarrow \frac{1}{T_S} = \frac{1}{7,66} - \frac{1}{24,63} \Rightarrow T_S = 11,12h$$

Analisando a figura ao lado, o tempo  $\Delta t$  que Phobos ficará acima do horizonte para o observador é:

$$\left| \begin{aligned} \Delta t &= \frac{11,12h}{360^\circ} \cdot 2\theta \\ \cos \theta &= \frac{R_M}{R_M + h} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} \Delta t &= \frac{11,12h}{360^\circ} \cdot 2\theta \\ \cos \theta &= \frac{3393}{3393 + 5987} \end{aligned} \right. \Rightarrow \Rightarrow \Delta t = \frac{11,12h}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 68,8^\circ \Rightarrow \Delta t = 4,25h$$

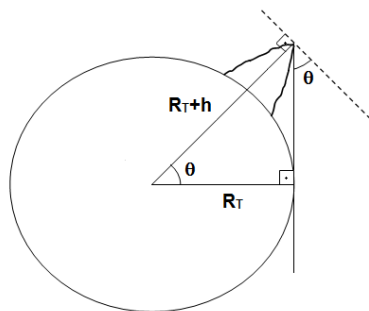


20) Sendo  $\theta$  o ângulo do campo de visão do telescópio e  $d$  o deslocamento aparente de Vega em  $\Delta t = 5,3 \text{ min}$ , analisando a figura, temos:



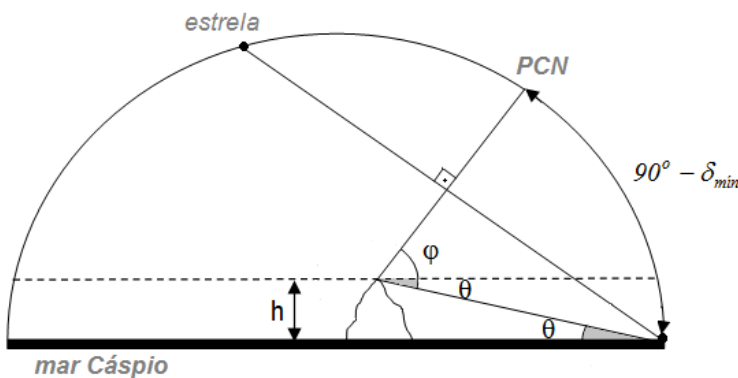
$$\begin{aligned}
 d &= \theta \cdot R \\
 d &= \varphi \cdot R \cos \delta \\
 \varphi &= \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \cdot \cos \delta \Rightarrow \\
 T &= 23\text{h}56 \text{ min} \\
 \Rightarrow \theta &= \frac{2\pi}{(23.60 + 56) \text{ min}} \cdot 5,3 \text{ min} \cdot \cos 39^\circ \Rightarrow \\
 \Rightarrow \theta &= 0,018 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta = 62'}
 \end{aligned}$$

21) O ângulo de depressão  $\theta$  pode ser estimado por:



$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{R_T}{R_T + h} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \cos \theta &= \frac{6370,8}{6370,8 + 5,6} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \theta &= 2^\circ 24'
 \end{aligned}$$

Então, analisando a figura, temos:



$$\begin{aligned}
 90^\circ - \delta_{\text{mín}} &= \varphi + \theta \Rightarrow \\
 \Rightarrow \delta_{\text{mín}} &= 90^\circ - 35^\circ 57' - 2^\circ 24' \Rightarrow \\
 \Rightarrow \delta_{\text{mín}} &= \boxed{51^\circ 39'}
 \end{aligned}$$

**22)** Analisando os mares lunares mostrados na imagem (Serenidade, Tranquilidade, Fertilidade e Néctar) concluímos que o bordo (lado) ocidental da Lua está iluminado. Acompanhado da posição do terminador lunar (linha que separa o bordo iluminado do bordo não iluminado), temos que a Lua está próxima ao quarto crescente.

Como o céu está escuro e a Lua (na fase quarto crescente) está próxima ao horizonte, estima-se que são aproximadamente 0h. Portanto, ela está se pondo e o horizonte mostrado é o ocidental.

**23)** Considerando que o plano da órbita lunar está inclinado  $5,14^\circ$  com o plano da eclíptica, o intervalo de declinações da Lua é:

$$\delta_{\min} < \delta_{\text{Lua}} < \delta_{\max} \Rightarrow -23^\circ 26' - 5,14^\circ < \delta_{\text{Lua}} < -23^\circ 26' + 5,14^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow -28,57^\circ < \delta_{\text{Lua}} < -18,29^\circ$$

Sendo o tempo necessário para um astro surgir no horizonte e atingir a culminação máxima (H) dado por  $\cos H = -\text{tg} \delta . \text{tg} \varphi$ , para a situação descrita, o valor máximo e mínimo é:

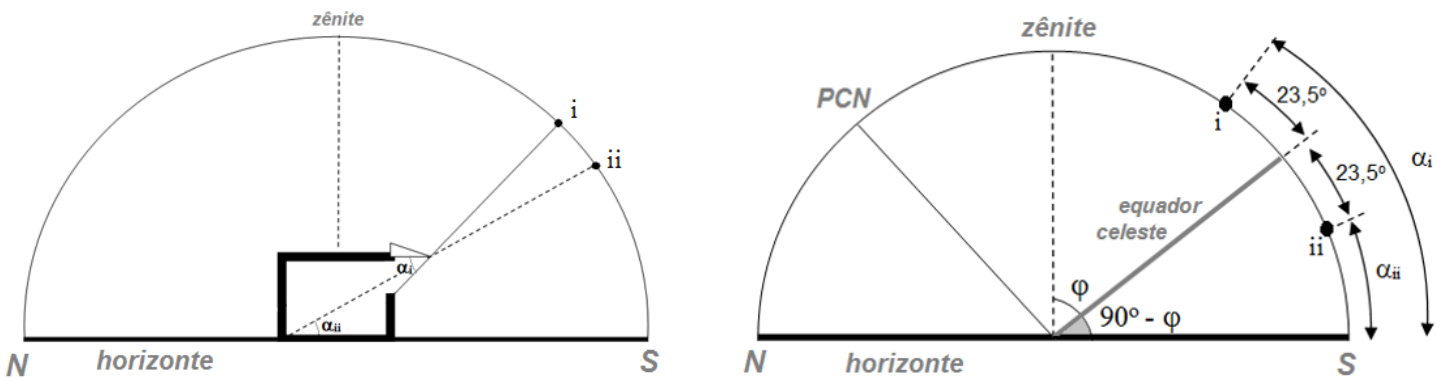
$$\cos H_{\max} = -\text{tg}(-28,57^\circ) . \text{tg}(-6^\circ 49') \Rightarrow H_{\max} = 6\text{h}15\text{min}$$

$$\cos H_{\min} = -\text{tg}(-18,29^\circ) . \text{tg}(-6^\circ 49') \Rightarrow H_{\min} = 6\text{h}09\text{min}$$

Como o tempo de permanência acima do horizonte ( $\Delta t$ ) é 2H, o intervalo solicitado será:

$$12\text{h}18\text{min} < \Delta t < 12\text{h}30\text{min}$$

**24)** Considerando i a situação do Sol ao meio-dia no solstício de verão e ii o Sol a ao meio-dia no solstício de inverno no local de latitude  $\varphi = 36^\circ N$ , esquematicamente das condições impostas no enunciado, temos:

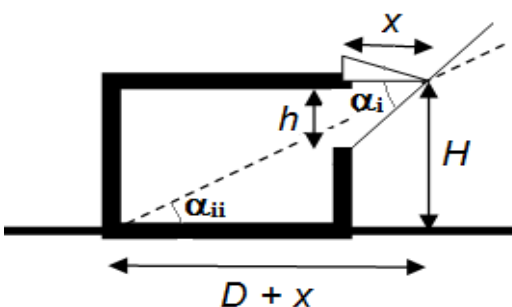


Da geometria do sistema, vem:

$$\alpha_i = (90^\circ - \varphi) + 23,5^\circ \Rightarrow \alpha_i = 77,5^\circ$$

$$\alpha_{ii} = (90^\circ - \varphi) - 23,5^\circ \Rightarrow \alpha_{ii} = 30,5^\circ$$

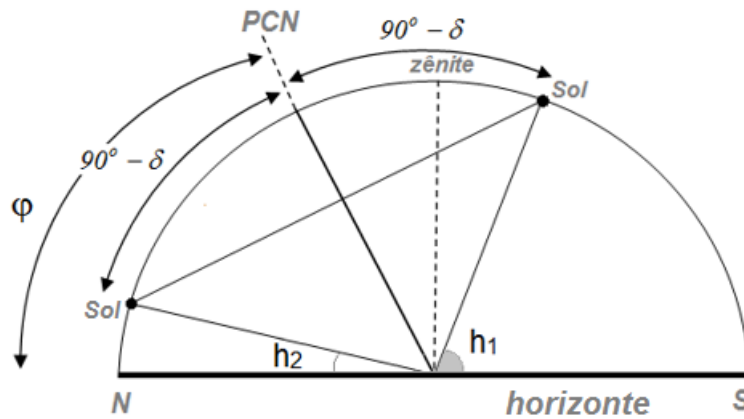
Logo:



$$\text{tg} \alpha_{ii} = \frac{H}{D+x} \Rightarrow x = \frac{H}{\text{tg} \alpha_{ii}} - D \Rightarrow x = 0,60\text{m}$$

$$\text{tg} \alpha_i = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x . \text{tg} \alpha_i \Rightarrow h = 2,67\text{m}$$

25) Como o comprimento máximo da sombra da haste neste dia é finito, o Sol é circumpolar no local de observação, esquematicamente, temos:



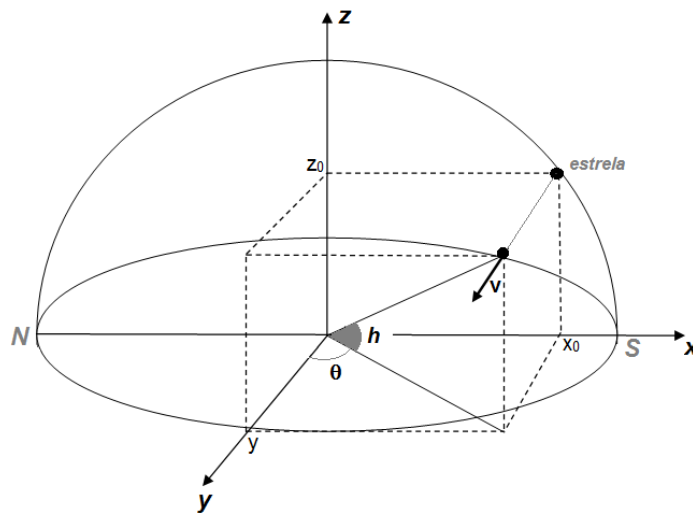
Onde  $h_1$  e  $h_2$  correspondem, respectivamente, a altura máxima e mínima do Sol e podem ser determinadas pela análise das sombras da haste:

$$\text{tg } h_1 = \frac{1}{1,732} \Rightarrow h_1 = 30^\circ \quad \text{e} \quad \text{tg } h_2 = \frac{1}{5,671} \Rightarrow h_2 = 10^\circ$$

Portanto, analisando a figura, temos:

$$\begin{cases} h_1 + 90^\circ - \delta + \varphi = 180^\circ \\ h_2 + 90^\circ - \delta = \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi - \delta = 60^\circ \\ \varphi + \delta = 100^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = 80^\circ} \quad \text{e} \quad \boxed{\delta = 20^\circ}$$

26) a) Esquematicamente, temos:



É válido que:

$$\text{tg } h = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \text{tg } \theta = \frac{x_0}{y}$$

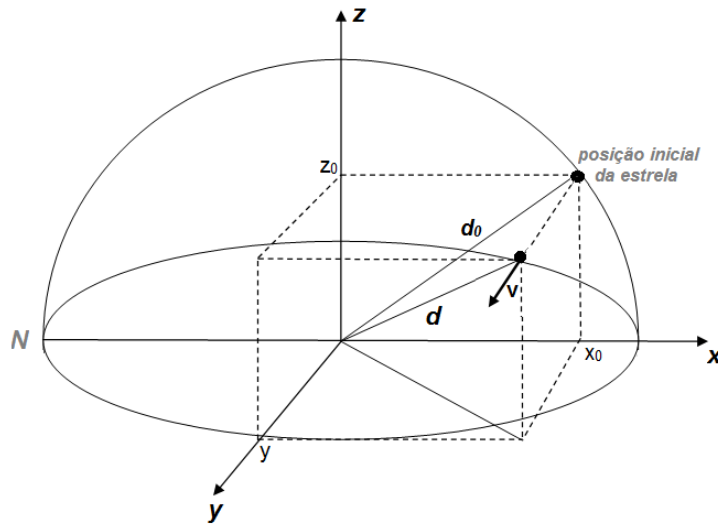
Como  $z_0$  e  $x_0$  são constantes, para  $y \rightarrow \infty$ , temos:

$$\boxed{h = 0^\circ} \quad \text{e} \quad \theta = 0^\circ$$

Portanto, considerando a contagem do azimute ( $A$ ) a partir do ponto cardinal Norte para leste, quando  $\theta = 0^\circ$ , temos:

$$\boxed{A = 270^\circ}$$

b) Considerando que no instante que a estrela atinge a magnitude 6 ela está a uma distância  $d$  do observador, temos:



$$m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{L}{4\pi \cdot d_0^2} \cdot \frac{4\pi \cdot d^2}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \log\left(\frac{d}{d_0}\right)^2 \Rightarrow 0,45 - 6 = -5 \log\left(\frac{d}{d_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 12,9 \cdot d_0$$

Como o movimento da estrela ao longo do eixo  $y$  acontece de forma retilínea e uniforme  $\left(v = \frac{2\pi}{T} \cdot d_0\right)$  a equação horária da estrela neste eixo é:

$$y = y_0 + v \cdot t \Rightarrow y = 2\pi \cdot d_0 \cdot t \quad (\text{com } v \text{ dado em } d_0 / \text{dia})$$

Então:

$$d^2 = x_0^2 + y^2 + z_0^2 \Rightarrow d^2 = (x_0^2 + z_0^2) + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = d_0^2 + y^2 \Rightarrow (12,9 \cdot d_0)^2 = d_0^2 + (2\pi \cdot d_0 \cdot t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 2,045 \text{ dias}$$

## Soluções: Astrofísica

**Comentário:** Sempre que necessário, consulte a tabela de constantes. Alguns valores foram aproximados nas resoluções.

1) a) Considerando que o raio orbital, soma do raio da Terra mais a altura em relação a superfície, triplicou, a variação da energia mecânica do satélite será:

$$\Delta E_{mec} = -\frac{GMm}{2r_f} + \frac{GMm}{2r_i} = \frac{GMm}{2} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{3r_i} \right) \Rightarrow \Delta E_{mec} = \frac{GMm}{2} \cdot \frac{2}{3r_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_{mec} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 3 \cdot 10^2}{3 \cdot (6,4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)} = 5,8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) Como a massa do satélite é muito menor que a massa da Terra, da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P_i^2}{r_i^3} = \frac{P_f^2}{r_f^3} \Rightarrow \frac{P_i^2}{r_i^3} = \frac{P_f^2}{(3r_i)^3} \Rightarrow \frac{P_i}{P_f} = 0,19$$

c) Para escapar da órbita, é necessário que  $\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow K = -U$ , então:

$$\frac{m \cdot v_{esp}^2}{2} = -\left(-\frac{GMm}{r}\right) \Rightarrow v_{esp} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Portanto:

$$\frac{v_{espi}^2}{v_{esp f}^2} = \frac{\frac{2GM}{r_i}}{\frac{2GM}{3r_i}} \Rightarrow \frac{v_{espi}}{v_{esp f}} = \sqrt{3}$$

2) a) Considerando apenas a influência do Sol, a energia mecânica do sistema será:

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{GM_{Sol} \cdot m}{r} = m \cdot \left( \frac{v^2}{2} - \frac{G \cdot M_{Sol}}{r} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{mec} &= m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{47 \cdot 10^3}{3,6} \right)^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(150 - 3,4) \cdot 10^9} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{mec} &\approx -8,21 \cdot 10^8 \cdot m \end{aligned}$$

Como a  $E_{mec} < 0$ , temos que a órbita é elíptica.

b) Considerando apenas a influência da Terra, a energia mecânica do sistema será:

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{GM_{Terra} \cdot m}{r} = m \cdot \left( \frac{v^2}{2} - \frac{G \cdot M_{Terra}}{r} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{mec} &= m \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{47 \cdot 10^3}{3,6} \right)^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{3,4 \cdot 10^9} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{mec} &\approx 8,51 \cdot 10^7 \cdot m \end{aligned}$$

Como a  $E_{mec} > 0$ , temos que a órbita é hiperbólica.

3) Considerando a situação que um objeto é abandonado na extremidade livre da nuvem ( $v_{ext} = 0$ ), sua energia potencial ao atingir o centro ( $U_{centro}$ ) será:

$$\begin{aligned} E_{ext} = E_{centro} &\Rightarrow \frac{m \cdot v_{ext}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{m \cdot v_{centro}^2}{2} + U_{centro} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{GMm}{R} &= \frac{GMm}{2R} + U_{centro} \Rightarrow U_{centro} = -\frac{3}{2} \frac{GMm}{R} \end{aligned}$$



Portanto, nas condições de escape ( $E_{mec} = 0$ ), temos:

$$\frac{m.v_{esp}^2}{2} + U_{centro} = 0 \Rightarrow \frac{m.v_{esp}^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v_{esp} = \sqrt{\frac{3GM}{R}}$$

4) A velocidade de um astro em órbita elíptica kepleriana é dada por:

$$E_{mec} = K + U \Rightarrow -\frac{GMm}{2a} = \frac{m.v^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow v^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Onde:  $r$  é a distância entre os centros de massa dos corpos envolvidos e  $a$  é o semi-eixo orbital.

A velocidade máxima ( $v_M$ ) e mínima ( $v_m$ ) acontece no periastro e apoastro respectivamente. Nestes pontos  $r_M = a(1-e)$  e  $r_m = a(1+e)$ , onde  $e$  é a excentricidade orbital. Logo:

$$v_M^2 = GM \left( \frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \cdot \frac{(1+e)}{(1-e)}$$

$$v_m^2 = GM \left( \frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \cdot \frac{(1-e)}{(1+e)}$$

Da 3ª Lei de Kepler, vem que:  $GM = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{P^2}$ , então:

$$v_M \cdot v_m = \frac{GM}{a} \Rightarrow v_M \cdot v_m = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{P^2} \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow a = P \cdot \frac{\sqrt{v_M \cdot v_m}}{2\pi}$$

5) a) Da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{a^3} &= \frac{(P + \Delta P)^2}{(a + \Delta a)^3} \Rightarrow \frac{P^2 + 2P \cdot \Delta P + \Delta P^2}{P^2} = \frac{a^3 + 3a^2 \cdot \Delta a + 3a \cdot \Delta a^2 + \Delta a^3}{a^3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 + \frac{2\Delta P}{P} + \frac{\Delta P^2}{P^2} = 1 + \frac{3\Delta a}{a} + \frac{3\Delta a^2}{a^2} + \frac{\Delta a^3}{a^3} \end{aligned}$$

Como  $\Delta a \ll a$  e  $\Delta P \ll P$ , o afastamento  $\Delta a$  será:

$$\begin{aligned} \frac{2\Delta P}{P} &= \frac{3\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta a = \frac{2}{3} \frac{\Delta P \cdot a}{P} \Rightarrow \Delta a = \frac{2}{3} \cdot \frac{0,12 \cdot (6380 + 400) \cdot 10^3}{5544} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta a = 97,83m \end{aligned}$$

b) Velocidade do satélite:

$$v_s = \frac{2\pi \cdot a}{P} = \frac{2\pi \cdot (6380 + 400) \cdot 10^3}{5544} \Rightarrow v_s = 7683,982 \text{ m/s}$$

Velocidade do astronauta:

$$v_a = \frac{2\pi \cdot (a + \Delta a)}{P + \Delta P} = \frac{2\pi \cdot (6738 + 97,83) \cdot 10^3}{5544,12} \Rightarrow v_a = 7683,927 \text{ m/s}$$

c) O tempo necessário para o astronauta chegar ao satélite é:

$$v = \frac{\Delta a}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{97,83}{10} \Rightarrow \Delta t = 9,783s$$

Logo, como a diferença entre as velocidades tangenciais é de 0,055 m/s, o desvio em relação ao meio do satélite será de 0,538 m. Portanto, o astronauta irá conseguir realizar a ancoragem (desvio menor que 6 m).

6) a) Da conservação do momento angular e também da energia, a velocidade  $v_T$  com que a nave deve sair da Terra é:

$$\left| \begin{array}{l} m \cdot v_T \times R_T = m \cdot v_M \times R_M \\ \frac{m \cdot v_T^2}{2} - \frac{G \cdot M_S \cdot m}{R_T} = \frac{m \cdot v_M^2}{2} - \frac{G \cdot M_S \cdot m}{R_M} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_M = \frac{R_T \cdot v_T}{R_M} \\ v_T^2 - v_M^2 = 2GM_S \cdot \left( \frac{R_M - R_T}{R_T \cdot R_M} \right) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{2GM_S \cdot R_M}{R_T \cdot (R_M + R_T)}}$$

Antes de calcular a velocidade que se deve impulsionar a nave, recordemos que a velocidade orbital de Terra é dada por  $V_T = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R_T}}$ . Comparando as duas equações, vemos que  $V_T > v_T$ , logo a nave deve ser freada, isto é, a nave deve ser lançada em direção oposta a velocidade orbital da Terra. Então:

$$\Delta v = V_T - v_T = \sqrt{\frac{G \cdot M_S}{R_T}} - \sqrt{\frac{2GM_S \cdot R_M}{R_T \cdot (R_M + R_T)}} \Rightarrow \Delta v \approx 7,3 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

b) O semieixo maior da órbita da nave é dado por:

$$a = \frac{0,4 + 1}{2} = 0,7UA$$

Da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$T^2 = a^3 \Rightarrow T^2 = 0,7^3 \Rightarrow T = 0,58 \text{ anos} = 213,7 \text{ dias}$$

Logo:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{213,7}{2} = 106,9 \text{ dias}$$

7) a) Da geometria da elipse, temos que o semieixo maior será:

$$a = \frac{1,5 + 1}{2} \Rightarrow a = 1,25UA$$

Já a excentricidade é:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{(1,5 - 1,25)}{1,25} \Rightarrow e = 0,2$$

b) Para o semieixo maior medido em unidades astronômicas (UA), o período orbital em anos e considerando que a massa da sonda é muito menor que a massa do Sol, da 3ª Lei de Kepler para a situação, vem:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Sol}} = 1 \Rightarrow GM_{Sol} = 4\pi^2 = \mu$$

Portanto, a velocidade de saída  $v_s$  da sonda ( $r = 1UA; a = 1,25UA$ ) é;

$$v_s^2 = 4\pi^2 \left( \frac{2}{1} - \frac{1}{1,25} \right) \Rightarrow v_s = 6,88 \frac{UA}{ano}$$

A velocidade  $v_T$  de translação da Terra ( $r = 1UA; a = 1UA$ ):

$$v_T^2 = 4\pi^2 \left( \frac{2}{1} - \frac{1}{1} \right) \Rightarrow v_T = 6,28 \frac{UA}{ano}$$

Logo:

$$|\Delta v| = |v_s - v_T| \Rightarrow \Delta v = 0,6 \frac{UA}{ano} = 2,85 \frac{km}{s}$$

c) O período orbital da sonda é:

$$P^2 = a^3 \Rightarrow P^2 = 1,25^3 \Rightarrow P = 1,4 \text{ ano}$$

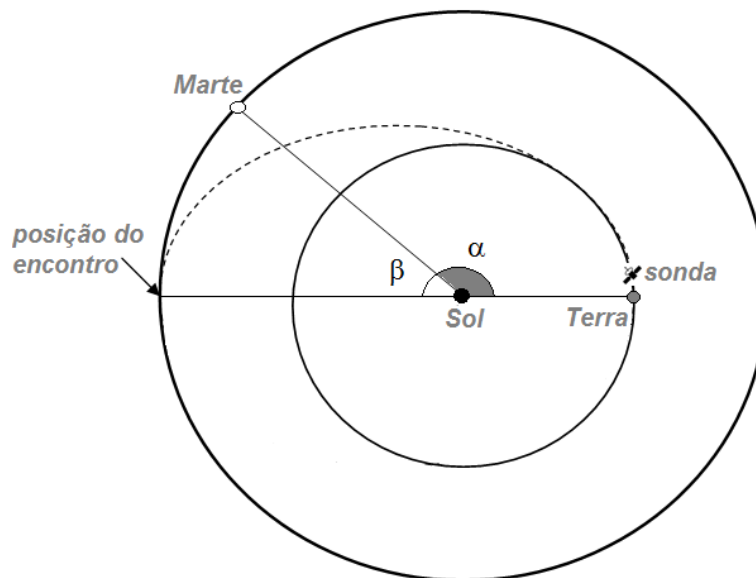
Portanto, o tempo de viagem será:

$$\Delta t = \frac{P}{2} = 0,7 \text{ ano}$$

d) O período orbital de Marte é:

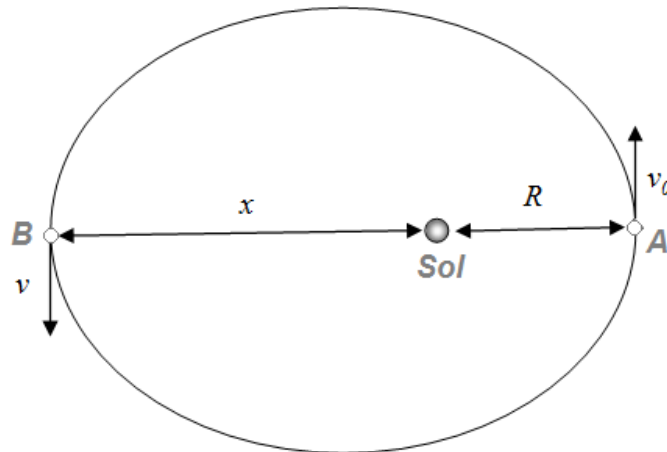
$$P_M^2 = a_M^3 \Rightarrow P_M^2 = 1,5^3 \Rightarrow P = 1,837 \text{ ano}$$

Sendo  $\alpha$  a diferença entre as longitudes eclípticas entre Marte e a Terra no instante do disparo, da geometria da situação, temos:



$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \beta = \frac{360^\circ}{1,837} \cdot 0,7 \end{cases} \Rightarrow \alpha + 137,2^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 42,8^\circ$$

8) O esquema abaixo ilustra a Terra, de massa  $m$ , na situação em que se encontra em sua maior proximidade ao Sol (ponto A) e maior afastamento (ponto B). Da conservação do momento angular, temos:



$$L_A = L_B \Rightarrow m.v_0 \times R = m.v \times x \Rightarrow v = \frac{v_0 \cdot R}{x}$$

Da conservação da energia entre os pontos A e B, vem:

$$\begin{aligned} -\frac{GMm}{R} + \frac{m.v_0^2}{2} &= -\frac{GMm}{x} + \frac{m.v^2}{2} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} + \frac{GM}{x} &= \frac{v^2}{2} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} + \frac{GM}{x} = \frac{v_0^2 R^2}{2x^2} \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados por  $2x^2$ , temos:

$$\begin{aligned} v_0^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot \frac{GM}{R} + 2x \cdot GM &= v_0^2 \cdot R^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( v_0^2 - 2 \cdot \frac{GM}{R} \right) \cdot x^2 + 2GM \cdot x - v_0^2 \cdot R^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação de 2º grau anterior, vem:

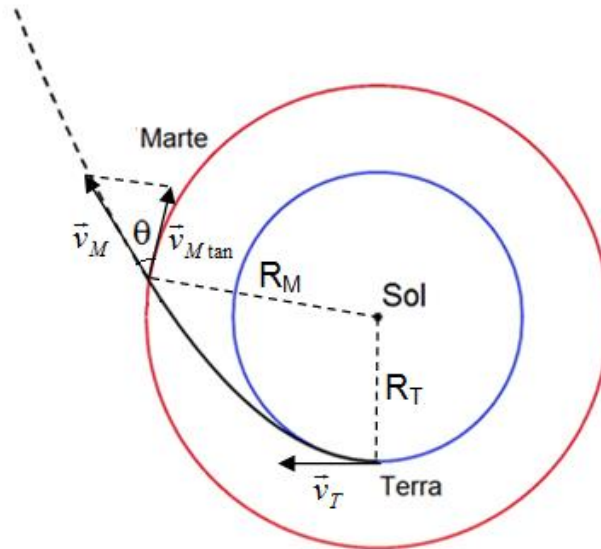
$$x = \frac{R^2 \cdot v_0^2}{2GM - v_0^2 \cdot R} \text{ (apogeu) e } x' = R \text{ (perigeu)}$$

Portanto, apenas a solução  $x = \frac{R^2 \cdot v_0^2}{2GM - v_0^2 \cdot R}$  satisfaz a questão.

9) Considerando a trajetória da nave uma parábola ( $E_{mec} = 0$ ) e apenas o efeito gravitacional com o Sol, a velocidade de saída da Terra  $v_T$  e a velocidade de cruzamento com a órbita de Marte  $v_M$  podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} \frac{m.v_T^2}{2} - \frac{GMm}{R_T} = 0 \Rightarrow v_T &= \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} \\ \frac{m.v_M^2}{2} - \frac{GMm}{R_M} = 0 \Rightarrow v_M &= \sqrt{\frac{2GM}{R_M}} \end{aligned}$$

Sendo  $v_{Mtan}$  a componente tangencial a órbita de Marte, da conservação do momento angular, vem:



$$L_T = L_M \Rightarrow m \cdot v_T \times R_T = m \cdot v_{Mtan} \times R_M \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{Mtan} = \frac{v_T \cdot R_T}{R_M}$$

Logo, o ângulo  $\theta$  será dado por:

$$\cos \theta = \frac{v_{Mtan}}{v_M} \Rightarrow \cos \theta = \frac{v_T \cdot R_T}{R_M} \cdot \sqrt{\frac{R_M}{2GM}} = \frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{R_T}} \cdot \frac{R_T}{R_M} \cdot \frac{\sqrt{R_M}}{\sqrt{2GM}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{\frac{R_T}{R_M}} = \sqrt{\frac{1}{1,5}} \Rightarrow \theta = 35,26^\circ$$

10) a) A energia mecânica do sistema pode ser descrita como:

$$E_{total} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow E_{total} = \frac{p^2}{2m} - GMm \cdot u$$

Como o sistema é conservativo ( $E_{mecA} = E_{mecB}$ ), temos:

$$\frac{p_A^2}{2m} - GMm \cdot u_A = \frac{p_B^2}{2m} - GMm \cdot u_B \Rightarrow GMm \cdot (u_B - u_A) = \frac{p_B^2 - p_A^2}{2m} \Rightarrow \\ \Rightarrow m = \sqrt{\frac{p_B^2 - p_A^2}{2GM(u_B - u_A)}} \Rightarrow m = 5 \cdot 10^4 \text{ kg}$$

b) A energia total do sistema é:

$$E_{total} = E_{mecA} = \frac{p_A^2}{2m} - GMm \cdot u_A \Rightarrow E_{total} = -1 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

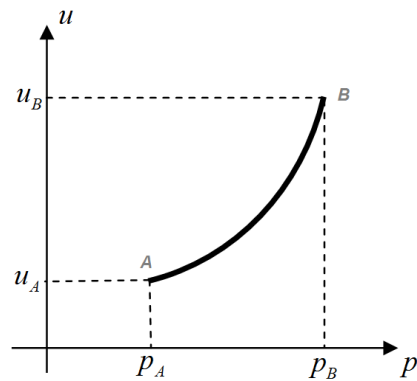
Como a  $E_{total} < 0$ , o objeto possui órbita elíptica.

c) É válido que:

$$E_{total} = \frac{p^2}{2m} - GMm.u \Rightarrow GMm.u = \frac{p^2}{2m} - E_{total}$$

Como  $E_{total} < 0$ , temos:

$$u = \frac{p^2}{2m^2GM} + E_{total} \text{ (equação de 2º grau)}$$



11) a) Como 1 Taris-ano são 10 Taris-dias, Taris realiza 10+1 rotações em 1 Taris-ano. Portanto, Taris realiza 11 rotações completas em 10 Taris-dias.

b) Da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P_{EN}^2}{a_{EN}^3} = \frac{P_{EX}^2}{a_{EX}^3} \Rightarrow \frac{0,2^2}{1^3} = \frac{1,6^2}{a_{EX}^3} \Rightarrow a_{EX} = 4 \text{ Endor-comprimento}$$

c) Da 3ª lei de Kepler, temos:

$$\frac{P_C^2}{a_C^3} = \frac{P_T^2}{a_T^3} \Rightarrow \frac{P_C^2}{(9)^3} = \frac{1^2}{1^3} \Rightarrow P_C = 27 \text{ Taris-anos}$$

d) Na situação de oposição, a distância será 8 Taris-comprimento.

e) No início do ano, com Taris (T) e Corulus (C) em posição, em relação a Taris, a longitude de Sola (S) é 0º e a de Corulus 180º.

Para “n” dias depois, analisando Corulus (C’), o ângulo f será dado por:

$$2\pi \rightarrow 270 \text{ Taris-dias}$$

$$f \rightarrow n$$

$$f = \frac{2\pi n}{270}$$

Para “n” dias depois, analisando Taris (T’), o ângulo c será dado por:

$$2\pi \rightarrow 10 \text{ Taris-dias}$$

$$c + f \rightarrow n$$

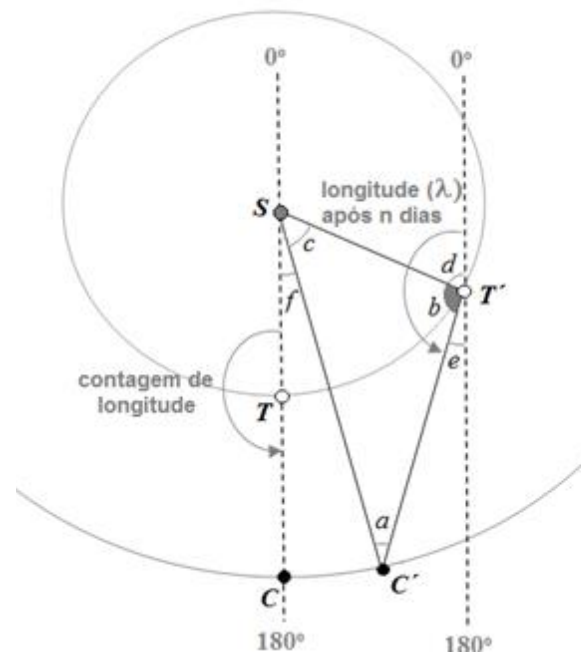
$$\Rightarrow c = \frac{2\pi n}{10} - \frac{2\pi n}{270} \Rightarrow c = \frac{52\pi n}{270}$$

$$c + f = \frac{2\pi n}{10}$$

Vamos agora expressar o ângulo a em função de “n”.

Aplicando a lei dos senos no  $\Delta ST'C'$ , temos:

$$\frac{\text{sen } a}{1} = \frac{\text{sen } b}{9} \Rightarrow 9 \cdot \text{sen } a = \text{sen } b$$



Da figura:

$$\begin{cases} b + d + e = \pi \\ a + b + c = \pi \\ d = c + f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \pi - b - d = \pi - b - c - f \\ b = \pi - (a + c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = a - f \\ b = \pi - \left(a + \frac{52\pi n}{270}\right) \end{cases}$$

Unindo as equações anteriores:

$$\begin{aligned} 9 \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b &\Rightarrow 9 \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \left( \pi - \left( a + \frac{52\pi n}{270} \right) \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9 \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \left( a + \frac{52\pi n}{270} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 9 \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} a \cdot \cos \left( \frac{52\pi n}{270} \right) + \cos a \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{52\pi n}{270} \right) \end{aligned}$$

Dividindo a equação anterior por  $\operatorname{sen} a$ , vem:

$$\begin{aligned} 9 &= \cos \left( \frac{52\pi n}{270} \right) + \cot g a \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{52\pi n}{270} \right) \Rightarrow \\ \cot g a &= \frac{9 - \cos \left( \frac{52\pi n}{270} \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{52\pi n}{270} \right)} \Rightarrow a = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{52\pi n}{270} \right)}{9 - \cos \left( \frac{52\pi n}{270} \right)} \right) \end{aligned}$$

Portanto, após "n" dias, a nova longitude  $\lambda$  de Corulus será:

$$\lambda = \pi - e \Rightarrow \lambda = \pi + f - a \Rightarrow$$

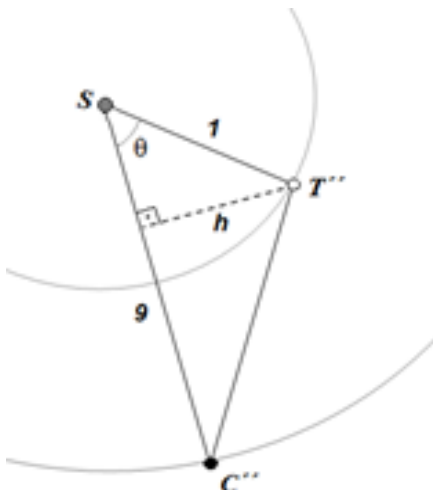
$$\Rightarrow \lambda = \pi + \frac{2\pi n}{270} - \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{52\pi n}{270} \right)}{9 - \cos \left( \frac{52\pi n}{270} \right)} \right)$$

f) Analisando a figura abaixo, a área solicitada é dada por:

$$A = \frac{9h}{2} = \frac{9 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} \theta}{2}$$

Do item anterior (e), temos que o ângulo  $\theta$  equivale a  $c$  para  $n = 1$ . Logo:

$$\begin{cases} \theta = \frac{52\pi}{270} \\ A = \frac{9 \cdot \operatorname{sen} \theta}{2} \end{cases} \Rightarrow A = 2,56 \text{ Taris} - \text{comprimento}^2$$



**12)** Considerando Antares uma esfera com momento de inércia  $I = \frac{2}{5}MR^2$ , da conservação do momento angular, temos:

$$\begin{cases} L_i = L_f \\ L = I \times \omega \Rightarrow \frac{2}{5}M_i \cdot R_i^2 \cdot \omega_i = \frac{2}{5}M_f \cdot R_f^2 \cdot \omega_f \Rightarrow \\ \omega = \frac{v}{R} = 2\pi \cdot f \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_i \cdot R_i^2 \cdot \frac{v_i}{R_i} = M_f \cdot R_f^2 \cdot 2\pi \cdot f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15,5 \cdot M_{Sol} \cdot 700 \cdot R_{Sol} \cdot 3,4 \cdot 10^3 = 4 \cdot M_{Sol} \cdot (4 \cdot 10^8)^2 \cdot 2\pi \cdot f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f = 6,38 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}}$$

**13) a)** A magnitude absoluta de Sirius é:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow -1,5 - M = 5 \log 2,6 - 5 \Rightarrow \boxed{M = 1,42}$$

b) A luminosidade de Sirius em relação ao Sol será:

$$M_{Sol} - M = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{L_{Sol}}{L} \right) \Rightarrow 4,82 - 1,42 = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{L_{Sol}}{L} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{L}{L_{Sol}} = 22,9}$$

c) Comparando as luminosidades, temos:

$$\frac{L}{L_{Sol}} = \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot R_{Sol}^2 \cdot \sigma \cdot T_{Sol}^4} \Rightarrow 22,9 = \left( \frac{R}{R_{Sol}} \right)^2 \cdot \left( \frac{10000}{5800} \right)^4 \Rightarrow \boxed{\frac{R}{R_{Sol}} = 1,6}$$

**14) a)** Para manter sua magnitude bolométrica inalterada, a estrela deverá manter o fluxo luminoso constante ( $F_A = F_B$ ):

$$\frac{L_B}{L_A} = \frac{4\pi \cdot R_B^2 \cdot \sigma \cdot T_B^4}{4\pi \cdot R_A^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4} \Rightarrow \frac{L_B}{L_A} = \left( \frac{150R}{R} \right)^2 \cdot \left( \frac{T}{4T} \right)^4 \Rightarrow \frac{L_B}{L_A} = \left( \frac{150}{16} \right)^2$$

$$F_A = F_B \Rightarrow \frac{L_A}{4\pi d_A^2} = \frac{L_B}{4\pi d_B^2} \Rightarrow \left( \frac{d_B}{d_A} \right)^2 = \frac{L_B}{L_A} \Rightarrow \frac{d_B}{30 \text{ pc}} = \frac{150}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d_B = 281,25 \text{ pc}}$$

b) O tempo máximo da vida dessa estrela pode ser estimado por:

$$\begin{cases} L = \frac{0,9\%E}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{0,9\%m \cdot c^2}{L} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 1,08 \cdot 10^{17} \text{ s ou } 3,42 \cdot 10^9 \text{ anos}} \\ E = m \cdot c^2 \end{cases}$$

**15)** A relação entre os fluxos das estrelas é:

$$m_A - m_B = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{F_A}{F_B} \right) \Rightarrow 2 - 3 = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{F_A}{F_B} \right) \Rightarrow F_A = 10^{2/5} F_B$$

Como a magnitude combinada máxima está associada a soma dos fluxos ( $F_C = F_A + F_B$ ), temos:



$$m_C - m_A = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_C}{F_A}\right) \Rightarrow m_C - 2 = -\frac{5}{2} \log\left(1 + \frac{F_B}{F_A}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_C = 2 - \frac{5}{2} \log(1 + 10^{-2/5}) \Rightarrow m_C = 1,64$$

16) Pelo diagrama HR, uma estrela G2V é do mesmo tipo que o Sol. Portanto, no caso limite de visibilidade, vale:

$$M_{Sol} - m_{lim} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_{Sol}}{F_{lim}}\right) \Rightarrow -26,6 - 6 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{1,37 \cdot 10^3}{F_{lim}}\right) \Rightarrow$$

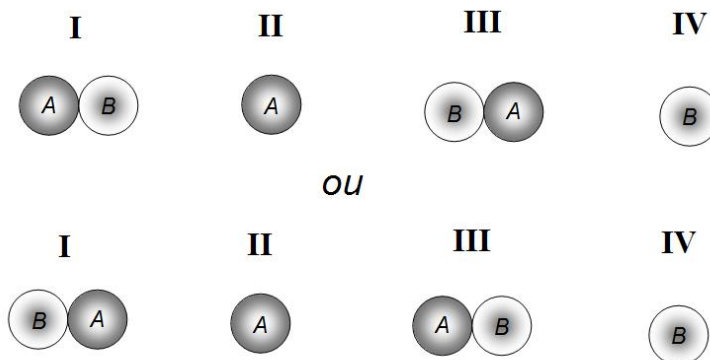
$$\Rightarrow F_{lim} = 1,04 \cdot 10^{-10} \frac{W}{m^2}$$

Assumindo que o raio  $r$  da pupila humana possui 3 mm, temos:

$$F_{lim} = \frac{n \cdot E_{fóton}}{A_{olho}} \Rightarrow F_{lim} = \frac{n}{\pi \cdot r^2} \cdot \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{F_{lim} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \lambda}{hc} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \approx 8000 \text{ fótons}$$

17) a) A seguir seguem dois esquemas possíveis. Sendo A a estrela menos brilhante e B a estrela mais brilhante, para cada ponto, temos:



b) Como a profundidade de cada mínimo é definida pela diferença entre a magnitude aparente da estrela e a magnitude aparente total da binária, para o mínimo primário, temos:

$$\Delta mag_1 = m_A - m_{tot} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_A}{F_{tot}}\right) \Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_A}{4\pi \cdot d^2} \cdot \frac{4\pi \cdot d^2}{L_{tot}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_A}{L_{tot}}\right)$$

Analogamente, para o mínimo secundário, vem:

$$\Delta mag_2 = m_B - m_{tot} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_B}{F_{tot}}\right) \Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_B}{4\pi \cdot d^2} \cdot \frac{4\pi \cdot d^2}{L_{tot}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_B}{L_{tot}}\right)$$

c) Para o mínimo primário, temos:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{L_A}{L_{tot}} \right) \\ L_{tot} = L_A + L_B \quad \Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{L_A}{L_A + L_B} \right) \Rightarrow \\ L = 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left( 1 + \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4}{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_B^4} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{5000}{12000} \right)^4 \right) \Rightarrow \Delta mag_1 = 3,8$$

Analogamente, para o mínimo secundário, vem:

$$\Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{L_B}{L_A + L_B} \right) = -\frac{5}{2} \log \left( 1 + \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_B^4}{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log \left( 1 + \left( \frac{12000}{5000} \right)^4 \right) \Rightarrow \Delta mag_2 = 0,03$$

18) A distância inicial ( $d_0$ ) de Aldebaran a Terra é:

$$m_{V\alpha} - M_{V\alpha} = 5 \cdot \log d_0 - 5 \Rightarrow 0,85 + 0,63 = 5 \log d_0 - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_0 = 19,77 pc$$

A distância final ( $d$ ) de Aldebaran à Terra quando deixar de ser visível será:

$$m'_{V\alpha} - M_{V\alpha} = 5 \cdot \log d - 5 \Rightarrow 6 + 0,63 = 5 \log d - 5 \Rightarrow d = 211,836 pc$$

A velocidade de afastamento Doppler de Aldebaran é dada por:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c \cdot \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \Rightarrow v = 54,09 \frac{km}{s}$$

Portanto:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta d}{v} = \frac{d - d_0}{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{(211,836 - 19,77)}{54,06} \cdot 3,086 \cdot 10^{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = 1,095 \cdot 10^{14} s \quad \text{ou} \quad 3,47 \cdot 10^6 \text{ anos}$$

19) a) A partir da Lei de Wien, temos:

$$\lambda_{m\acute{a}x} \cdot T = 2,89 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lambda_{m\acute{a}x} \cdot 42000 = 2,89 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_{m\acute{a}x} = 6,88 \cdot 10^{-8} m = 68,8 nm \quad (\text{ultravioleta})$$

b) A fração da energia irradiada pode ser expressa através da comparação das luminosidades de Naos na região visível ( $L_V$ ) e a total ou bolométrica ( $L_B$ ). Portanto, temos:

$$M_V - M_B = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_V}{L_B}\right) \Rightarrow C.B. = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_V}{L_B}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4,04 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_V}{L_B}\right) \Rightarrow L_V = 0,024 L_B \Rightarrow L_V = 2,4\% L_B$$

20) A magnitude bolométrica ( $M_B$ ) de Minelava é:

$$C.B. = M_V - M_B \Rightarrow 1,68 = -0,58 - M_B \Rightarrow M_B = -2,26$$

Já a sua luminosidade bolométrica ( $L$ ) será dada por:

$$M_B - M_{Sol} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow -2,26 - 4,74 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L}{L_{Sol}} = 631 \Rightarrow L = 2,20 \cdot 10^{29} W$$

O raio ( $R$ ) de Minelava é:

$$L = 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \Rightarrow 2,20 \cdot 10^{29} = 4\pi \cdot R^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3720^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 4,02 \cdot 10^{10} m \text{ ou } 57,7 R_{Sol}$$

Portanto, sua densidade ( $\rho$ ) será:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2M_{sol}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \rho = \frac{2}{57,7^3} \cdot \frac{M_{sol}}{\frac{4}{3}\pi R_{Sol}^3} \Rightarrow \rho = 1,04 \cdot 10^{-5} \cdot \rho_{Sol}$$

21) a) Nesta configuração, as estrelas possuem velocidades perpendiculares à direção da Terra. Portanto, neste instante, não há afastamento ou aproximação com a Terra para detectarmos o efeito Doppler.

b) Para a estrela A, temos:

$$\frac{\Delta\lambda_A}{\lambda_{0A}} = \frac{v_A}{c} \Rightarrow \frac{(6,5 - 6,58) \cdot 10^{-7}}{6,58 \cdot 10^{-7}} = \frac{v_A}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_A = -3,647 \cdot 10^6 m/s \text{ (aproximação)}$$

Analogamente, para a estrela B:

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_{0B}} = \frac{v_B}{c} \Rightarrow \frac{(6,76 - 6,58) \cdot 10^{-7}}{6,58 \cdot 10^{-7}} = \frac{v_B}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_B = 8,206 \cdot 10^6 m/s \text{ (afastamento)}$$

22) Da equação do efeito Doppler relativístico ( $z > 0,1$ ), vem:

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \Rightarrow (z+1)^2 = \frac{c+v}{c-v} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{(0,13+1)^2 - 1}{(0,13+1)^2 + 1} \cdot c \Rightarrow v = 0,12c$$

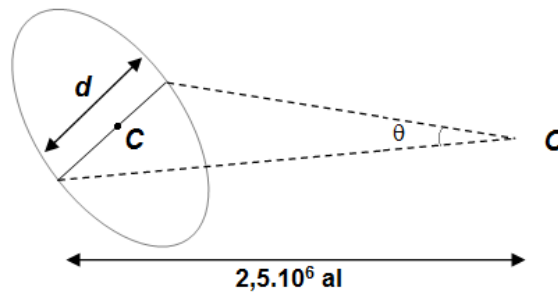
Da Lei de Hubble, temos:

$$v = H_0 \cdot d \Rightarrow 0,12 \cdot 3 \cdot 10^5 = 67,8 \cdot d \Rightarrow d = 531 \text{ Mpc}$$

Como  $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ al}$ , conclui-se que:

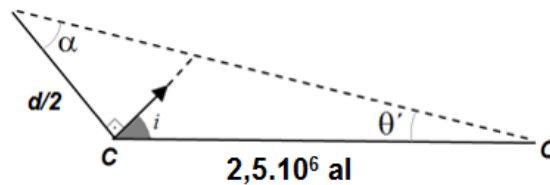
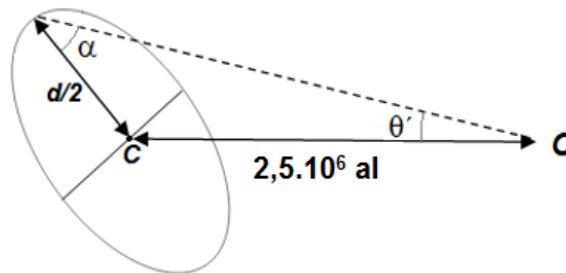
$$d = 531 \cdot 10^6 \cdot 3,26 = 1,73 \cdot 10^9 \text{ al} \text{ ou } 1,73 \cdot 10^9 \text{ anos}$$

23) a) Sendo  $d$  o diâmetro da galáxia, analisando a figura, temos:



$$\text{tg } \theta = \frac{d}{2,5 \cdot 10^6} \Rightarrow d = 2,5 \cdot 10^6 \cdot \text{tg } 3,2^\circ \Rightarrow d = 1,396 \cdot 10^5 \text{ al}$$

b) Aplicando a lei dos senos, vem:



$$\frac{2,5 \cdot 10^6}{\text{sen } \alpha} = \frac{6,99 \cdot 10^4}{\text{sen } 0,5^\circ} \Rightarrow \alpha = 18,18^\circ$$

Portanto:

$$\alpha + \theta' + i = 90^\circ \Rightarrow i = 71,32^\circ$$

c) A velocidade de recessão desta galáxia é:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{6556,22 - 6562,80}{6562,80} = \frac{v}{3 \cdot 10^5} \Rightarrow v = -300,79 \frac{km}{s}$$

Já o módulo do parâmetro z:

$$|z| = \frac{v}{c} \Rightarrow |z| = 10^{-3}$$

d) A magnitude absoluta ( $M$ ) da galáxia é:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 4,36 - M = 5 \log \left( \frac{2,5 \cdot 10^6}{3,26} \right) - 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow M = -20,06$$

e) A magnitude limite deste telescópio é:

$$m_{lim} = 7,1 + 5 \log d \Rightarrow m_{lim} = 13,63$$

Portanto, como  $m < m_{lim}$ , será possível observar a galáxia com este telescópio.

**24)** Sendo  $D_{T-L}$  a distância Terra - Lua, o diâmetro aparente ( $\theta$ ) da cratera visto da Terra é:

$$\theta = \frac{d}{D_{T-L}} = \frac{80km}{384400km} \Rightarrow \theta = 2,08 \cdot 10^{-4} rad$$

Já a menor separação angular resolvível (resolução angular) do olho humano é:

$$\theta_{hum} = 1,22 \frac{\lambda}{D_{pupila}} = 1,22 \frac{500 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \theta_{hum} = 1,22 \cdot 10^{-4} rad$$

Como  $\theta > \theta_{hum}$ , é possível observar a cratera a olho nu da superfície da Terra.

**25)** Sendo  $d_{BN}$  o diâmetro do buraco negro, de massa  $M = 4 \cdot 10^6 M_{Sol}$ , que está a uma distância  $D_{T-BN}$  da Terra, temos que o diâmetro angular ( $\theta$ ) do buraco negro da perspectiva da Terra será:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{d_{BN}}{D_{T-BN}} \\ d_{BN} &= 2R_{Sch} \Rightarrow \theta = \frac{2R_{Sch}}{D_{T-BN}} = \frac{2}{D_{T-BN}} \cdot 3 \left( \frac{4 \cdot 10^6 M_{Sol}}{M_{Sol}} \right) \Rightarrow \\ R_{Sch} &= 3 \left( \frac{M}{M_{Sol}} \right) \end{aligned} \right\} \\ \Rightarrow \theta = \frac{6 \cdot 4 \cdot 10^6}{8,5 \cdot 10^3 \cdot 3,086 \cdot 10^{13}} \Rightarrow \theta = 9,149 \cdot 10^{-11} rad$$

Considerando um telescópio cujo diâmetro é igual ao diâmetro terrestre ( $D = 2R_T$ ), o comprimento de onda necessário para distinguir o horizonte de eventos deve ser menor ou igual a:

$$\theta \geq 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \theta \geq 1,22 \cdot \frac{\lambda}{2R_T} \Rightarrow \lambda \leq \frac{2R_T \cdot \theta}{1,22} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{2.6370.10^3.9,149.10^{-11}}{1,22} \Rightarrow \lambda \leq 9,55.10^{-4} m \text{ ou } \lambda \leq 0,955 mm$$

26) a) Considerando que 1 pc = 206265 UA, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{10}{25.206265} \Rightarrow \alpha = 1,94.10^{-6} \text{ rad ou } 0,4''$$

Observação: Para ângulos pequenos  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ . Pela definição de parsec (pc), se dividirmos uma distância em UA por outra em pc, encontraremos o ângulo em segundo de arco. Logo:

$$\alpha = \frac{10UA}{25pc} \Rightarrow \alpha = 0,4''$$

b) Para ângulos pequenos  $\operatorname{sen} \theta \approx \theta$ , portanto:

$$\operatorname{sen} \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \theta = 1,22 \frac{1,6.10^{-6}}{8,1} \Rightarrow \theta = 2,41.10^{-7} \text{ rad ou } 0,05''$$

Sim, o anel é observável, pois  $\alpha > \theta$ .

## Gabaritos

### Astronomia

- 1) A 2) B 3) 7h18min 4) 22° 22' 9,8" N 5) 41° 43' N 6)  $\delta = 46^\circ 35'$ ;  $\alpha = 15\text{h}15\text{min}10\text{s}$  7) a) 0° b) 35°  
 8)  $\delta_A = 15^\circ 45'$ ;  $\alpha_A = 7\text{h}35\text{min}$  e  $\delta_B = 84^\circ 15'$ ;  $\alpha_B = 19\text{h}35\text{min}$  9) 24° 02' N 10)  $\varphi = 80^\circ 0' 10''$  S;  $\delta = -69^\circ 39' 40''$   
 11) 4h31min40s 12) a) 0° b) 23° 27' c) 0° d) 53° 7' 48,4" e) 6h f) 6h g) 13° 25' 12" S  
 13) a) Peacock, Rigel e Achernar. b) Alderamin e Polaris. c) Peacock e Achernar. d) Algeiba e Arcturus. e) Arcturus.  
 14) Não é possível uma situação na Cracóvia que Sirius não nasça e canopus nasça e se ponha.  
 15) a)  $-23^\circ 27' \leq \delta < 0^\circ$  b)  $-23^\circ 27' \leq \delta < -22^\circ 54'$  16) B 17) 1,52 UA 18) 12364 km 19) 4,25 h 20) 62' 21) 51° 39'  
 22) Quarto crescente; 0 h e horizonte ocidental. 23) 12h18min <  $\Delta t$  < 12h30min 24) x = 0,60m; h 2,67 m  
 25)  $\varphi = 80^\circ$ ;  $\delta = 20^\circ$  26) a) h = 0°; A = 270° b) 2,045 dias

### Astrofísica

- 1) a)  $5,8.10^9$  J b) 0,19 c)  $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ ;  $\sqrt{3}$  2) a) Órbita elíptica. b) Órbita hiperbólica. 3)  $\sqrt{\frac{3GM}{R}}$   
 4) Ver resolução. 5) a)  $\Delta a = 97,93\text{m}$  b)  $v_s = 7683,982$  m/s;  $v_a = 7683,927$  m/s c) 0,538m; o astronauta irá conseguir realizar a ancoragem.  
 6)  $7,3.10^3$  m/s 7) a) a = 1,25 UA; e = 0,2 b) 2,85 km/s c) 0,7 ano d) 42,8° 8)  $x = \frac{R^2 \cdot v_0^2}{2GM - v_0^2 \cdot R}$   
 9) 35,26° 10) a)  $5.10^4$  kg b)  $-1.10^{12}$  J c) Ver resolução.

- 11) a) 11    b) 4 Endor    c) 27 Taris-ano    d) 8 Taris-comprimento    e)  $\lambda = \pi + \frac{2\pi n}{270} - \arctg\left(\frac{\sin\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}{9 - \cos\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}\right)$
- f) 2,56 Taris<sup>2</sup>    12)  $6,38 \cdot 10^{-3}$  Hz    13) a) 1,42    b) 22,9    c) 1,6    14) a) 281,25 pc    b)  $3,42 \cdot 10^9$  anos
- 15) 1,64    16) 8000 fótons    17) a) Ver resolução.    b)  $\Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_A}{L_{tot}}\right)$  ;  $\Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_B}{L_{tot}}\right)$
- c) 3,8; 0,03    18)  $3,47 \cdot 10^6$  anos    19) a) 68,8 nm    b) 2,4%    20)  $1,04 \cdot 10^{-5} \rho_{sol}$
- 21) a) Neste instante não há aproximação ou afastamento em relação a Terra para detectarmos o efeito Doppler.    b)  $v_A = -3,647 \cdot 10^6$  m/s ;  $v_B = 8,206 \cdot 10^6$  m/s
- 22) 531 Mpc;  $1,73 \cdot 10^9$  anos    23) a)  $1,396 \cdot 10^5$  al    b)  $71,32^\circ$     c) -300,79 km/s ;  $10^{-3}$     d) -20,06    e) Ver resolução.
- 24) Ver resolução.    25)  $\lambda \leq 0,955$  mm    26) a) 0,4"    b) 0,05"

## Tabelas e constantes

### Alfabeto grego

Maiúscula	Minúscula	Pronúncia
A	$\alpha$	alfa
B	$\beta$	beta
$\Gamma$	$\gamma$	gama
$\Delta$	$\delta$	delta
E	$\epsilon$	épsilon
Z	$\zeta$	dzeta
H	$\eta$	eta
$\Theta$	$\theta$	teta
I	$\iota$	iota
K	$\kappa$	capa
$\Lambda$	$\lambda$	lâmbda
M	$\mu$	mi

Maiúscula	Minúscula	Pronúncia
N	$\nu$	ni
$\Xi$	$\xi$	ksi
O	$\omicron$	ômicron
$\Pi$	$\pi$	pi
P	$\rho$	rô
$\Sigma$	$\sigma$	sigma
T	$\tau$	tau
Y	$\upsilon$	ípsilon
$\Phi$	$\phi, \varphi$	fi
X	$\chi$	qui
$\Psi$	$\psi$	psi
$\Omega$	$\omega$	ômega

### Distâncias

Nome	Símbolo	Valores
Unidade astronômica	UA	1 UA = $1,496 \cdot 10^{11}$ m
Ano-luz	al	1 al = $9,461 \cdot 10^{15}$ m = 63 240 UA
Parsec	pc	1 pc = $3,086 \cdot 10^{16}$ m = 206 264,806 UA = 3,262 al

## Constantes físicas

Constantes físicas	Símbolo	Valores
carga elétrica elementar	e	$1,602 \cdot 10^{-18}$ C
massa de repouso do elétron	-	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa de repouso do próton	-	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
massa de repouso do nêutron	-	$1,675 \cdot 10^{-27}$ kg
constante de Avogadro	$N_A$	$6,022 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
constante de Planck	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s
constante dos gases	R	8,314 J/(K.mol)
constante da gravitação universal	G	$6,673 \cdot 10^{-11}$ N.m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
velocidade da luz no vácuo	c	$2,998 \cdot 10^8$ m/s
constante de Stefan - Boltzmann	$\sigma$	$5,670 \cdot 10^{-8}$ W/(m <sup>2</sup> .K <sup>4</sup> )
constante de Boltzmann	k	$1,381 \cdot 10^{-23}$ J/K
constante de Wien	b	$2,898 \cdot 10^{-3}$ m.K
constante de Hubble	$H_0$	$67,80 \pm 0,77$ km/(s.Mpc)
unidade de massa atômica	u.m.a	1 u.m.a. = $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

## Dados da Lua

Propriedades	Valores
Massa	$7,349 \cdot 10^{22}$ kg
Raio médio	$1,737 \cdot 10^6$ m
Distância média Terra - Lua	$3,844 \cdot 10^8$ m
Densidade média	$3,36$ g/cm <sup>3</sup>
Aceleração da gravidade na superfície	$1,62$ m/s <sup>2</sup>
Temperatura	de $-170^\circ\text{C}$ a $120^\circ\text{C}$
Distância média a Terra	$3,78 \cdot 10^8$ m

## Constantes matemáticas

Constantes	Valores (≈)
$\pi$	3,141593
e	2,718282
1 rad	$57,29578^\circ$
1°	0,017453 rad
1''	$4,848 \cdot 10^{-6}$ rad

## Dados do Sol (☉)

Propriedades	Valores
Massa	$1,989 \cdot 10^{30}$ kg
Raio	$6,955 \cdot 10^8$ m
Temperatura efetiva	5780 K
Luminosidade	$3,96 \cdot 10^{26}$ W
Magnitude visual aparente na banda V	-26,78
Magnitude visual absoluta na banda V	4,75
Magnitude bolométrica absoluta	4,72
Inclinação do equador com a eclíptica	$7^\circ 15'$
Diâmetro angular aparente	$30'$
Distância ao centro da galáxia	8,5 kpc

## Dados da Terra (⊕)

Propriedades	Valores
Massa	$5,974 \cdot 10^{24}$ kg
Raio polar	$6,357 \cdot 10^6$ m
Raio equatorial	$6,378 \cdot 10^6$ m
Raio da esfera de mesmo volume	$6,371 \cdot 10^6$ m
Perímetro aproximado da linha do equador	40 000 km
Volume	$1,087 \cdot 10^{21}$ m <sup>3</sup>
Densidade média	$5,52$ g/cm <sup>3</sup>
Constante solar	1366 W/m <sup>2</sup>
Velocidade orbital média	29.783 km/s
Distância média ao Sol	$1,49 \cdot 10^{11}$ m
Aceleração da gravidade ao nível do mar a $45^\circ$ de latitude	$9,807$ m/s <sup>2</sup>



## Dados aproximados do Sistema Solar

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
<b>Diâmetro Equatorial (km)</b>	4878	12100	12756	6786	142984	120536	51108	49538
<b>Massa (<math>M_{\oplus}</math>)</b>	0,055	0,815	1	0,107	317,9	95,2	14,6	17,2
<b>Distância média ao Sol (<math>10^6</math> km)</b>	57,9	108,5	149,6	227,9	778,3	1423,6	2867	4488
<b>Excentricidade da Órbita</b>	0,206	0,0068	0,0167	0,093	0,048	0,056	0,046	0,010
<b>Inclinação do eixo em relação à normal ao plano da órbita</b>	0,1°	177°	23°27'	25°59'	3°05'	27°44'	98°	30°
<b>Período de Revolução (d=dias, a=anos)</b>	87,9 d	224,7 d	365,25d	686,98d	11,86a	29,46a	84,04a	164,8a
<b>Período de Rotação (d=dias, h=hora)</b>	58,6d	-243d	23h56m	24h37m	9h48m	10h12m	-17h54m	19h6m
<b>Densidade (<math>g/cm^3</math>)</b>	5,4	5,2	5,5	3,9	1,3	0,7	1,3	1,6
<b>Principais Componentes Atmosfera</b>	traços de Na, He, H, O	98%CO <sub>2</sub> , 3,5%N	78%N <sub>2</sub> , 21%O <sub>2</sub>	95%CO <sub>2</sub> , 3%N	90%H, 10%He	97%H, 3%He	83%H, 15%He, C H <sub>4</sub>	74%H, 25%He, CH <sub>4</sub>
<b>Gravidade Superficial em relação à Terra (<math>g_{\oplus}</math>)</b>	0,37	0,88	1	0,38	2,64	1,15	1,17	1,18