



# Exercícios de Astronomia e Astrofísica para olimpíadas culturais. Volume 3

Thiago Paulin Caraviello e Fellipy Dias Silva

## Introdução

*Exercícios de Astronomia e Astrofísica para olimpíadas culturais* é uma compilação de 60 questões, acompanhado das suas soluções, que tem por objetivo complementar os estudos dos alunos do ensino médio envolvidos em atividades olímpicas culturais de Astronomia. É uma ferramenta espetacular para aqueles que já tiveram contato com o assunto.

Os exercícios foram selecionados a partir dos temas mais frequentes presentes nas seletivas das equipes de estudantes que participaram da Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica (OLAA) e da *International Olympiad in Astronomy and Astrophysics* (IOAA), assim como exercícios destas competições.

Cada exercício vem acompanhada de uma letra que indica o nível de dificuldade segundo os autores. **[A]** indica menor dificuldade, **[B]** dificuldade moderada e **[C]** maior nível de dificuldade.

## Autores

**Thiago Paulin Caraviello (org.)** – Professor de Física e Astronomia para alunos do ensino médio desde 2003, formado pela Universidade de São Paulo, possui grande experiência em competições olímpicas culturais de Astronomia. Esteve presente em cinco edições da Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica e em cinco edições da *International Olympiad in Astronomy and Astrophysics* (IOAA). Atual membro da comissão organizadora da OBA.

**Fellipy Dias Silva** – Professor de Física e Astronomia para alunos do ensino fundamental e médio desde 2010. Com mestrado em astronomia pela Universidade de São Paulo, possui experiência na área de Divulgação Científica e educação em Astronomia. Já esteve presente em duas edições da IOAA.

## Índice

Astronomia.....	02
Astrofísica.....	10
Soluções: Astronomia.....	29
Soluções: Astrofísica.....	47
Gabaritos: Astronomia e Astrofísica.....	83
Tabelas e Constantes.....	86

## Astronomia

### 1) [A] (EAO) Estrela do Norte

Em quais latitudes a estrela Polaris ( $\alpha = 02^{\text{h}} 31^{\text{min}} 49^{\text{s}}$ ,  $\delta = +89^{\circ} 15' 51''$ ) é observável.

- Desconsiderando a atmosfera terrestre.
- Considerando a atmosfera terrestre. A refração observada na linha do horizonte é de 35,4 minutos de arco.
- Desconsiderando a atmosfera terrestre, em qual faixa de latitudes Polaris é circumpolar?

### 2) [A] (EAO) Onde está o Sol?

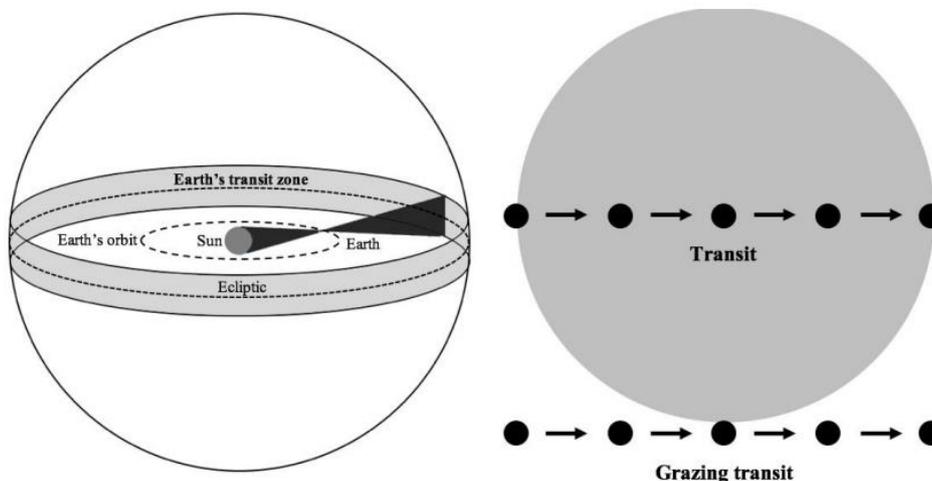
A meia-noite, no Observatório Real de Greenwich (latitude  $51^{\circ} 28' \text{ N}$ , longitude  $00^{\circ} 00' \text{ E}$ ), o tempo sideral marca 18,0 horas.

- Qual é a ascensão reta do Sol neste momento?
- Considerando a precisão de 1 dia, estime a data do ano deste momento.
- Em qual constelação o Sol está localizado? Escreva o nome e a sigla de acordo com o padrão da IAU.
- Qual é a culminação máxima que o Sol pode atingir no dia seguinte?

3) [A] Qual é o ângulo horário  $H$  e ângulo zenital  $z$  de Vega ( $\delta = 38^{\circ} 47'$ ) em Tessalônica ( $\lambda_1 = 1\text{h } 32\text{min}$ ,  $\phi_1 = 40^{\circ} 37'$ ), no momento em que ela cruza o meridiano local em Lisboa ( $\lambda_2 = -0\text{h } 36\text{ min}$ ,  $\phi_2 = 39^{\circ} 43'$ )?

### 4) [A] (IOAA) A região de trânsito da Terra

A região de trânsito da Terra é a área onde um observador extra-solar (situado bem longe do Sistema Solar) pode detectar o trânsito da Terra pelo disco solar. Para observadores na Terra, esta área é a projeção no plano do céu de uma faixa ao redor da eclíptica (em cinza claro na figura da esquerda). Considere que a Terra possui órbita circular de raio 1 ua.



- Encontre a largura angular, em graus, da região de trânsito da Terra onde os observadores extra-solares podem detectar um trânsito total da Terra (i.e. todo o disco da Terra passa em frente ao Sol).
- Encontre a largura angular, em graus, da região de trânsito da Terra onde os observadores extra-solares podem detectar pelo menos o trânsito parcial da Terra (i.e. apenas uma parte do disco da Terra passa em frente ao Sol).

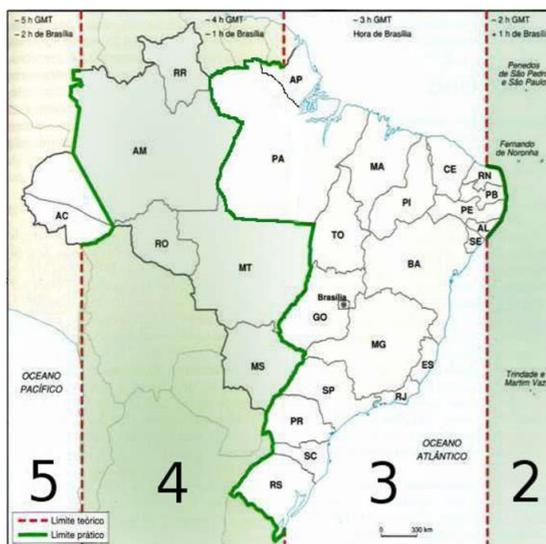
### 5) [A] (OLAA) Coordenadas e Tempo

- Suponha que a culminação superior de uma estrela se dê às 3h da manhã de tempo civil em 2 de março. Qual será o ângulo horário da mesma estrela em 15 de junho a mesma hora?
- As coordenadas equatoriais da estrela Próxima Centauri são: ascensão reta:  $14^{\circ} 29,7'$ ; declinação:  $-62^{\circ} 41'$ . A partir destes dados, determine para quais observadores na Terra (faixa de latitude) esta estrela é circumpolar visível.
- Em qual latitude nenhuma estrela é circumpolar?
- Se um observador se encontra sobre o círculo polar antártico, em que época do ano o movimento diurno do Sol será circumpolar?

5) [A] (*Seletiva*) Suponha que aqui no Hotel Fazenda Ribeirão tenha sido instalado um relógio de Sol cujo mostrador indica a hora solar verdadeira com a precisão de 1 min. Pela Equação do Tempo, para o dia 6 de fevereiro de 2019, o Sol estará “atrasado” cerca de 14 min em relação à hora solar média (Hora Oficial Brasileira). Que horas serão quando o Sol cruzar o meridiano local?

Obs.: A vigência do Horário de Verão está definida entre os dias 4 de novembro de 2018 e 16 de fevereiro de 2019.

Dado: O relógio tem as seguintes coordenadas: Latitude =  $-22^{\circ} 24' 40''$  e Longitude =  $-43^{\circ} 46' 15''$ . Dica: O mapa da hora legal brasileira (sem horário de verão) ao lado pode ajudar na resolução da questão.



7) [B] (*OLAA*) Você é um observador no Hemisfério Sul com latitude  $\alpha < 0$ . Se uma estrela tem declinação  $\delta < 0$ .

- Que condição deve ser cumprida para que seja uma estrela circumpolar?
- Demonstre a conhecida relação que permite calcular o ângulo horário  $H$  do surgimento e do ocaso de uma estrela em função da sua declinação e da latitude do local de observação.

$$\cos(H) = -\tan(\delta)\tan(\alpha)$$

c) Se um observador está em uma latitude de  $-30^{\circ}$  e uma estrela tem uma declinação de  $-45^{\circ}$ , calcule quanto tempo leva para a estrela aparecer e desaparecer no horizonte (tempo entre o nascer e ocaso).

8) [A] **A altura do vulcão Mauna Kea**

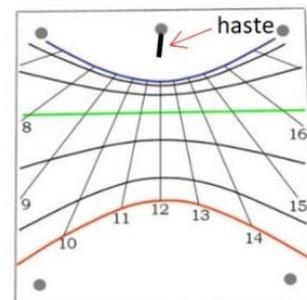
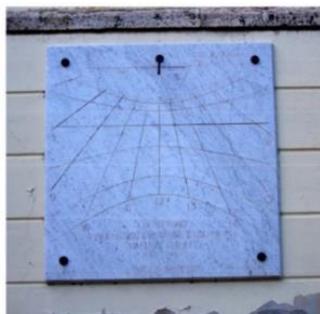
Uma lancha viaja na direção Norte-Sul, inicialmente na mesma latitude do vulcão *Mauna Kea*, localizado no Havaí, a velocidade constante de 75 km/h. Quando o Sol atinge sua culminação superior, a lancha chega na latitude em que se encontra o extremo da sombra do vulcão após 3,1 min. Determine a altura  $H$ , em metros, do vulcão *Mauna Kea* sabendo que a declinação do Sol para essa data é de  $\delta_{\odot} = -23,43^{\circ}$  e a latitude a qual se encontra o vulcão é de  $\phi = 19,32^{\circ}$  N.

9) [B] (*IOAA*) **Satélite Geoestacionário**

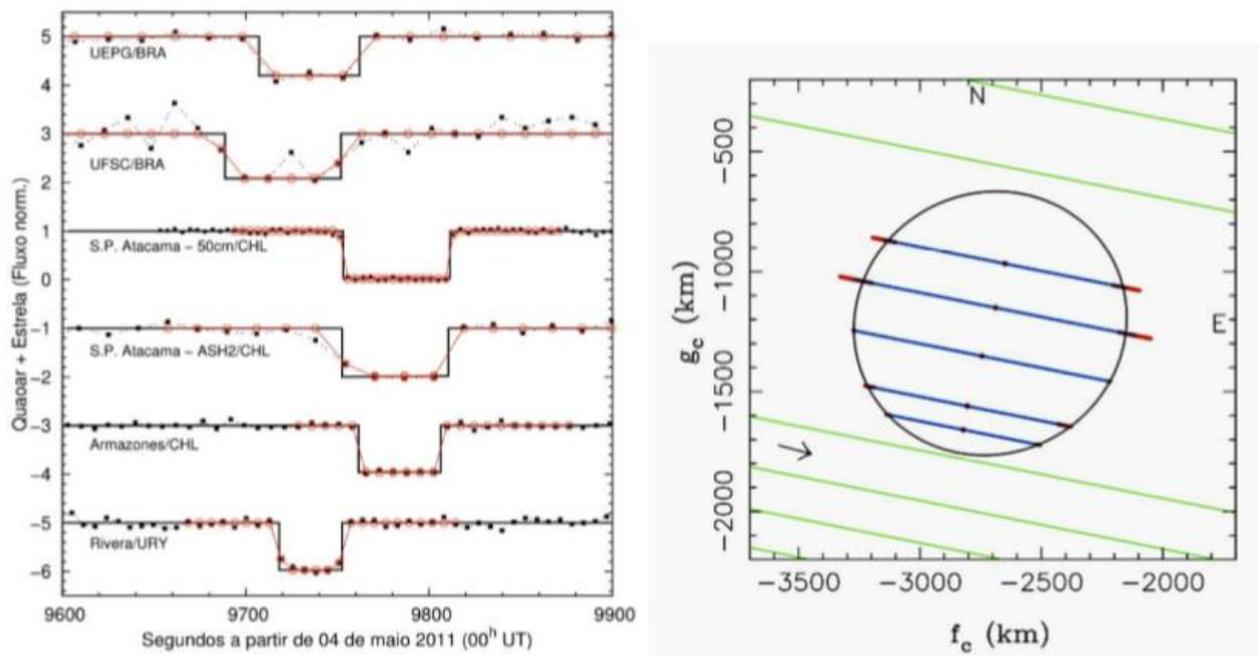
Um satélite geoestacionário é um satélite que orbita a Terra com período igual ao período de rotação terrestre. A altitude desses satélites é de 35786 km acima da superfície. Considere que um satélite é colocado em uma órbita geoestacionária com inclinação orbital de  $\theta = 6,69^{\circ}$  em relação ao plano equatorial. Calcule a máxima altura que o satélite atinge para um observador situado na latitude  $\phi = 51,49^{\circ}$  N. Ignore a refração atmosférica.

10) [B] (*Seletiva*) Considere o relógio de Sol mostrado na figura ao lado, à esquerda. Ele está montado numa parede do Observatório de Collurania, próximo da cidade de Téramo, na Itália. À direita, vemos um esquema do relógio para melhor visualização do seu painel. Sabendo que suas coordenadas são latitude  $\phi = 42^{\circ}39'13''$  N, longitude  $\lambda = 13^{\circ}43'54''$  E, responda:

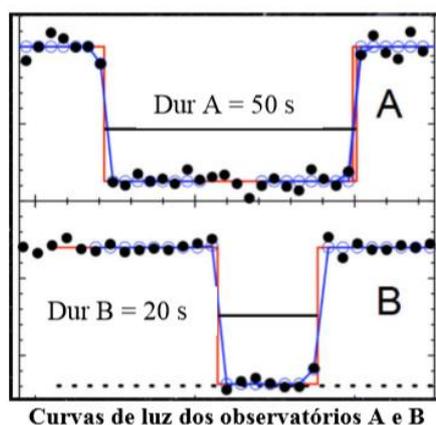
- Que tipo de tempo é indicado pelo relógio?
- O relógio está de frente para qual ponto cardeal?
- O que representa as duas linhas curvas extremas, na parte superior (azul) e inferior (vermelha) do mostrador?
- O que representa a linha reta central (verde)?
- Onde o relógio se encontra, a Equação do Tempo é nula em 1º de setembro. Neste dia, a que horas locais se dá o meio-dia verdadeiro?



**11) [B] (Seletiva)** Ocuatação Estelar é a observação da passagem de um objeto “em frente” a uma dada estrela para um dado observador. A medida da duração do evento de diferentes locais permite determinar o tamanho e forma do objeto. Abaixo podemos ver exemplos de curvas de luz que representam uma medida do perfil do corpo feitas de diferentes lugares (figura abaixo, à esquerda). Dessas medidas obtêm-se as cordas de ocultação, cujos tamanhos são obtidos para cada observador, tendo em vista a duração do evento. Dessas cordas de ocultação calcula-se o raio e forma do objeto com boa precisão (figura abaixo, à direita).



Dois observatórios, A e B, detectaram uma ocultação estelar e cada observatório mediu uma curva de luz, cujas ocultações duraram 50 e 20 segundos, respectivamente (figura abaixo).



Sabe-se que o objeto se deslocava no céu a uma velocidade de 15 km/s. Sabe-se, também, que a distância entre os observatórios é de 808 km. Com as informações acima, determine o raio do objeto observado, supondo que ele, em primeira aproximação, seja esférico.

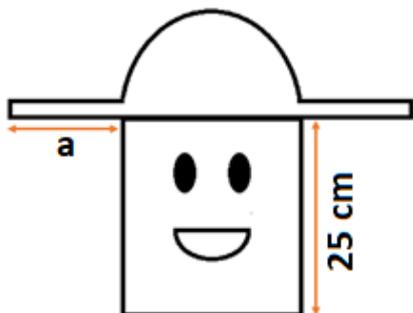
**12) [B] (IOAA) Altura de uma colina**

Dois amigos quiseram medir a altura de uma colina, no dia 21 de março de um ano qualquer, em uma região de latitude  $\phi = 40^\circ\text{N}$ . Um dos amigos subiu no topo da colina e combinou de enviar um sinal luminoso para o seu amigo que ficaria em uma aldeia próxima logo que ele visse o pôr do Sol. Sabe-se que o amigo na aldeia recebeu o sinal luminoso 4,1 minutos após o pôr do Sol na aldeia. A partir destes dados, estime a altura da colina e também a distância do horizonte até o amigo que ficou no topo da colina. Despreze a refração atmosférica.

**13) [B] (IOAA) A Grande Nuvem de Magalhães em Phuket**

As coordenadas da Grande Nuvem de Magalhães (LMC) são R.A. = 5h 24min e Dec =  $-70^{\circ} 00'$ . A latitude e longitude de Phuket são  $7^{\circ} 53' N$  e  $98^{\circ} 24' E$ , respectivamente. Em que data a LMC culmina às 21h em Phuket? O Tempo Sideral em Greenwich (GST) às 00h de 1<sup>o</sup> de janeiro no ano da observação é de 6h 43min. Phuket está na zona horária UT+7. Adote que 1 ano possui 365,25 dias de 24h.

**14) [B] (OLAA)** Citlali é uma jovem preocupada com os danos que a radiação ultravioleta do Sol pode causar à sua pele, por isso decide fazer um chapéu com características especiais. Citlali vive em Puebla, um lugar de latitude  $\phi = 19^{\circ}N$ . Considere que a cabeça da Citlali é um cilindro.



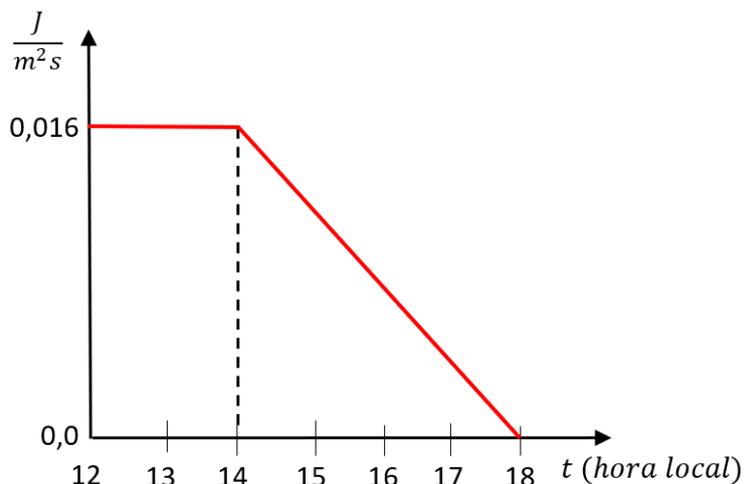
- a) Qual é a medida mínima  $a$  que a aba do chapéu deve ter se ela quiser evitar a radiação solar UV no seu rosto ao meio-dia em 21 de março?
- b) Qual é a medida mínima que a aba do chapéu deve ter se ela quiser evitar a radiação solar UV no seu rosto ao meio-dia todos os dias do ano?

Citlali decide que a aba do chapéu mede  $a = 13 \text{ cm}$ .

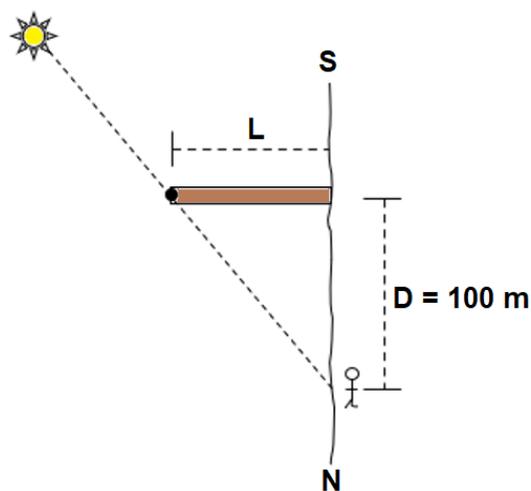
c) Se a Citlali estiver no Equador em 21 de setembro, a que horas desse dia seu chapéu cumpre seu propósito de proteger todo o seu rosto?

A dose eritematosa mínima (vulgo vermelhidão) por radiação UV (DEM) é a medida da energia mínima por unidade de área que causa queimaduras na pele de um ser humano médio e é  $DEM = 100 \text{ J/m}^2$ . O chapéu de Citlali absorve metade da radiação UV que recebe e deixa a outra metade passar.

d) Usando os dados do gráfico, responda: Se a Citlali começa se expor ao Sol ao meio-dia, a partir de que hora local, mesmo com o chapéu, Citlali terá queimadura solar causada por raios UV?



**15) [B] (OLAA)** No dia 15 de outubro, na cidade de Ayolas (latitude  $27^{\circ} 24'$  Sul e longitude  $56^{\circ} 51'$  Oeste), uma pessoa percorre um trecho de distância  $D = 100 \text{ m}$  a margem do rio Paraná. Neste dia, ela observa que o Sol nasce exatamente no extremo de um píer como mostra a figura ao lado. Na tabela são dadas declinações do Sol em certos dias do mesmo ano em que foi feita essa observação. A partir dos dados da tabela, e a partir de relações de trigonometria esférica, estime o comprimento  $L$  do píer.



DATA	DECLINAÇÃO
01 de outubro	$-03^{\circ}19'38''$
10 de outubro	$-06^{\circ}46'45''$
20 de outubro	$-10^{\circ}28'01''$
30 de outubro	$-13^{\circ}53'43''$

**16) [C] (IOAA) Distância até um NEA (Asteroide Próximo da Terra)**

Suponha que um NEA seja observado por dois astrônomos simultaneamente. Um deles está em *Nagykanizsa*, Hungria, e o outro em *Windhoek*, Namíbia. As longitudes das duas cidades estão a exatamente  $17^\circ$  Leste de *Greenwich*. Eles observam o asteroide quando ele cruza seus respectivos meridianos. O observador de *Nagykanizsa* vê o asteroide a  $25^\circ$  ao Sul de seu zênite, enquanto que o observador de *Windhoek* o vê a  $45^\circ$  ao Norte de seu zênite no mesmo instante. As latitudes das duas cidades são  $46^\circ 27' N$  e  $22^\circ 34' S$ , respectivamente. Considere que as observações são feitas ao nível do mar.

a) Desenhe um diagrama da configuração geocêntrica. Não esqueça de indicar a latitude das duas cidades, distâncias zenitais de observação do asteroide e declinação do asteroide.

b) Qual a distância do asteroide ao centro da Terra? Expresse a resposta em unidades de raio da Terra. Despreze o efeito da refração atmosférica.

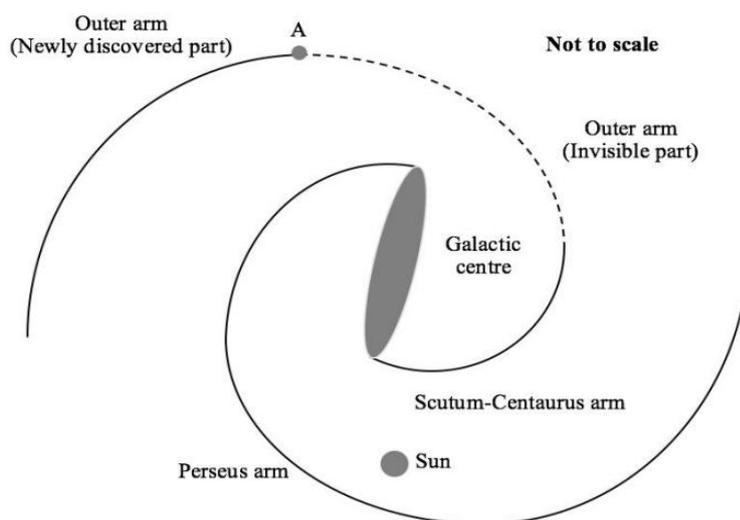
**17) [B] (IOAA) Sul → Leste → Norte**

Considere a Terra como uma esfera perfeita e rígida de raio  $R = 6378$  km. Suponha que um móvel saia de um ponto A, sobre a superfície terrestre, viaje  $6378$  km para o Sul, sobre o meridiano de *Greenwich*, até chegar em um ponto B. Ao chegar em B, vira para Leste e percorre mais  $6378$  km chegando em um ponto C. Em C, o mesmo móvel percorre outros  $6378$  km para Norte, retornando ao ponto original de partida. Calcule as coordenadas geográficas dos pontos A, B e C.

**18) [B] (IOAA) O Novo Braço Exterior da Via Láctea**

Em 2011, Dame e Thaddeus descobriram uma nova parte do braço exterior da Via Láctea estudando a linha de emissão de monóxido de carbono com o telescópio de  $1,2$  m do CfA (*Center for Astrophysics*). Eles observaram que a distribuição de monóxido de carbono se inicia na longitude galáctica  $\ell = 13,25^\circ$ , indicado pela letra A na figura ao lado, onde a velocidade radial é de  $20,9$  km/s se aproximando do Sol. Assuma que a curva de rotação galáctica é constante após  $5$  kpc de distância do centro galáctico; e que o Sol está a  $8,5$  kpc do centro da galáxia. Adote também que a velocidade do Sol ao redor do centro galáctico é de  $220$  km/s. A partir destes dados, determine:

- a distância, em kpc, do início do braço (ponto A) ao centro da galáxia.
- a distância, em kpc, do início do braço (ponto A) ao Sol.



**19) [B] (Seletiva)** A precessão dos equinócios é a variação da orientação do eixo de rotação terrestre, cuja projeção na esfera celeste descreve uma circunferência imaginária com período de cerca de  $26000$  anos. Em  $2100$  a projeção do eixo da Terra na esfera celeste apresentará a menor distância da que chamamos de "Estrela Polar" ( $\alpha$  Ursae Minoris), que terá declinação  $\delta_{\text{Polar}2100} = +89^\circ 32'$ . Entretanto, em  $2800$  a.C. quem ocupava esta posição de "Estrela Polar" era Thuban ( $\alpha$  Draconis). Naquela época, sua declinação era  $\delta_{\text{Thuban-2800}} = +89^\circ 48'$ . Considerando que, no ano  $2000$ , as declinações das duas estrelas foram, respectivamente,  $\delta_{\text{Polar}2000} = +89^\circ 16'$  e  $\delta_{\text{Thuban}2000} = +64^\circ 22'$ , calcule qual era a altura máxima, em relação ao horizonte, que a estrela polar atingia em  $2800$  a.C., para um observador localizado na cidade de Roma ( $\phi = 41^\circ 53' N$ ). Desconsidere os efeitos do movimento próprio das duas estrelas.

**20) [B]** Jan Hevelius (1611 – 1687) introduziu em sua carta celeste 11 novas constelações. Em 1928, a União Astronômica Internacional (IAU, sigla em inglês) registrou sete delas, visto na tabela 1.

a) Marque cada uma das constelações acima no mapa (Figura 1) em qualquer ponto dentro das constelações. Faça as marcações usando a nomenclatura oficial abreviada da IAU.

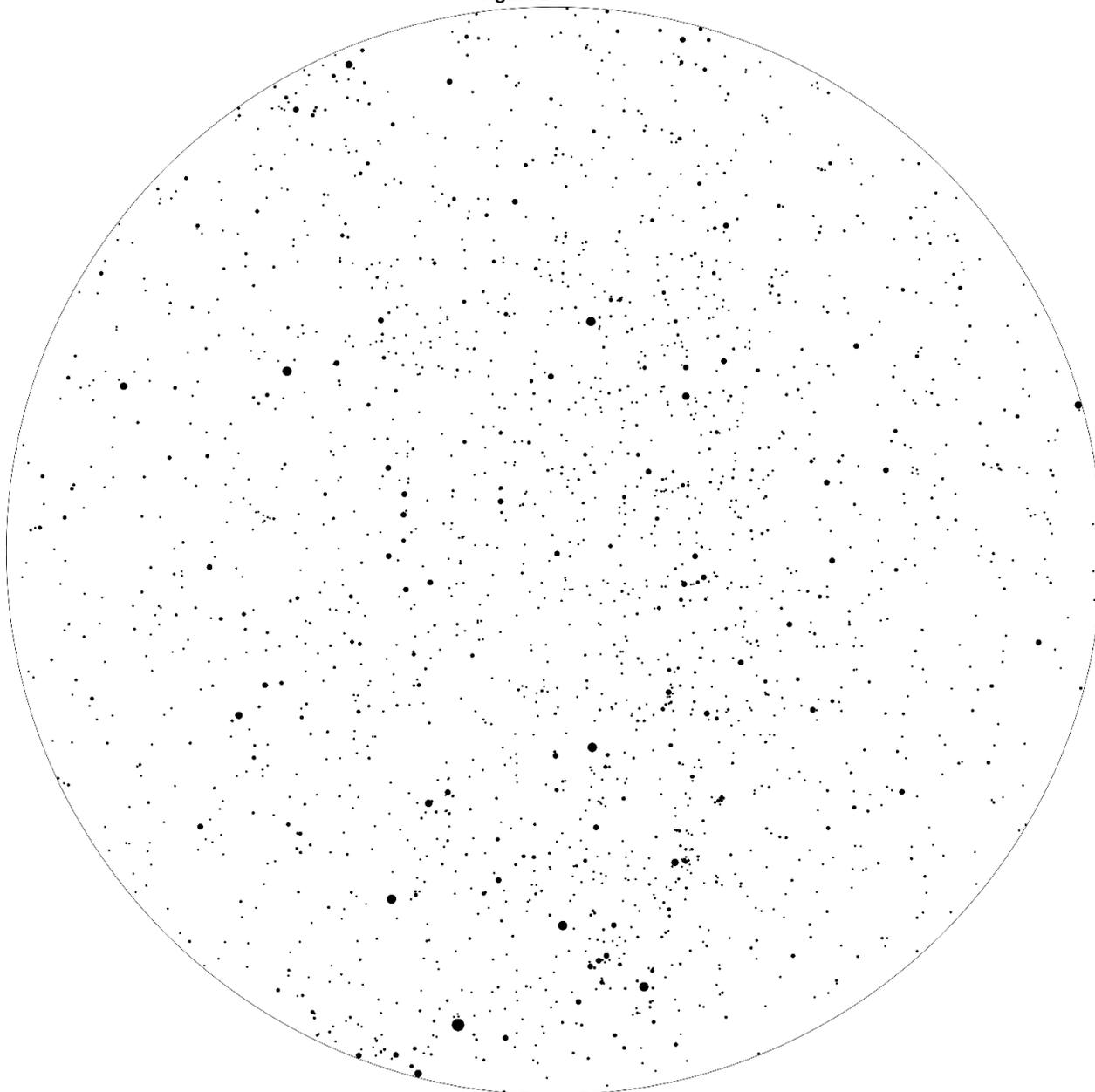
b) No mesmo mapa, marque as posições de 13 objetos do catálogo de Messier (não necessariamente das constelações citadas), dando o número Messier (M xx) de cada uma delas.

O mapa foi preparado para a época J 2000.0 e usa projeção polar com escala linear na declinação. Ele inclui estrelas de até quinta magnitude.

**Tabela 1**

Número	Abreviação IAU	Nome em latim	Tradução	Coordenadas do centro	
				$\alpha$ (hh: mm)	$\delta$ (°)
1	CVn	<i>Canes Venatici</i>	Cães de Caça	13:00	+40
2	Lac	<i>Lacerta</i>	Lagarto	22:30	+46
3	LMi	<i>Leo Minor</i>	Leão Menor	10:10	+32
4	Lyn	<i>Lynx</i>	Lince	08:00	+48
5	Sct	<i>Scutum</i>	Escudo	18:40	-10
6	Sex	<i>Sextans</i>	Sextante	10:15	-3
7	Vul	<i>Vulpecula</i>	Raposa	20:15	+24

**Figura 1**



**21) [B] (OLAA) Astronomia e os Maias**

*Chichén Itzá*, localizado em *Tinum* no México, é um dos sítios arqueológicos mais interessantes da civilização Maia devido às orientações astronômicas precisas que algumas de suas construções apresentam.

É provável que, para os Maias, a passagem do Sol pelo zênite tenha sido de grande importância, pois esse evento marca o final da estação seca e o início da estação chuvosa. Manter um registro dessas datas facilitou as atividades agrícolas.

Para os itens a seguir, adote a convenção de azimute NESW.

a) Ao meio-dia, de 21 de dezembro, o templo de *Kukulkan* lança uma sombra de 22 m de comprimento. Determine a latitude de *Chichén Itzá* sabendo que a altura do cume do templo é de 23 m (*Figura 1*).

Medidas revelam que a escada oeste do templo *Kukulkan* possui azimute de  $290^\circ$  medido a partir do Norte (*Figura 2*).

b) Qual é o ângulo de desvio ( $\theta$ ) dos eixos da pirâmide em relação aos pontos cardeais?

Atualmente, nos dias 23 de maio e 19 de julho, ocorre a passagem zenital do Sol em *Tinum*. Nestes dias, a luz do Sol penetra de forma vertical, através de um buraco retangular delineado na rocha pelos Maias, em um grande poço conhecido como *Cenote de Holtún* (*Figura 3*). O *Cenote de Holtún* possui simbolismo religioso relacionado ao submundo da cosmovisão Maia.

c) Qual é o azimute do Sol, ao seu nascer e pôr, no dia 23 de maio em *Tinum*?

O planeta Vênus, chamado pelos Maias de *Ahزاب Kab Ek* (a Estrela que desperta a Terra), era uma estrela muito importante associada a guerra, morte, pestilência e destruição. As janelas do *El Caracol*, o mais importante observatório astronômico Maia em *Chichén Itzá*, permitem acompanhar a trajetória do referido planeta ao longo do ano.

d) Qual é o diâmetro angular de Vênus, visto da Terra, em suas aproximações máxima e mínima?

Adote: distância Vênus-Sol = 0,72 UA; raio de Vênus = 6051,8 km.

A unidade básica no calendário Maia é de um dia, ou *kin*. Vinte *kines* formam um *winal* e 18 *winales* dão uma aproximação do ano solar de 360 dias, conhecido como *tun*. Vinte *tunes* formam um *katún* e 20 *katunes* um *baktún*. O maior período de contagem Maia é um ciclo com duração de 13 *baktunes*.

e) As Plêiades culminam superiormente em *Tinum* ( $\lambda = 88^\circ 34' W$ ) às 3:47 am do dia 21 de setembro. Determine o ângulo horário do aglomerado em *Greenwich*, à mesma hora, transcorridos 13 *winales* e 18 *kines*.

f) Determine se as Plêiades são circumpolares visíveis em *Tinum*, sabendo que a altura das Plêiades na culminação superior é de  $83^\circ 36'$ .

g) O final do último maior período de contagem Maia aconteceu no dia 21 de dezembro de 2012. Qual foi a data de início deste ciclo? Adote que 1 ano possui 365.

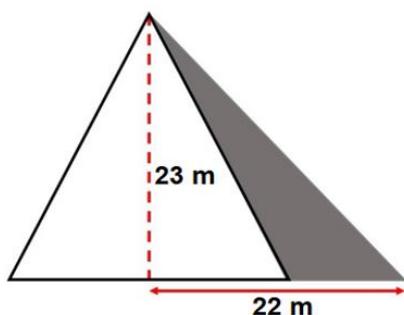


Figura 1

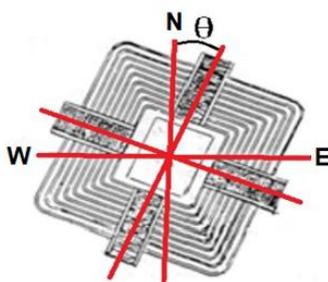


Figura 2

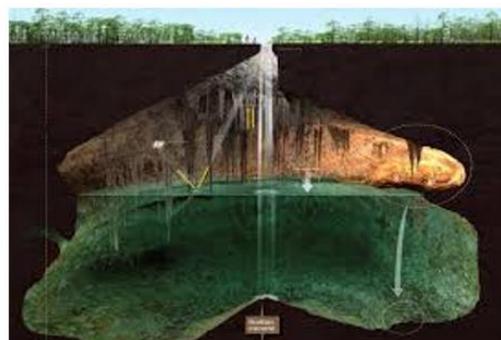


Figura 3 - Cenote de Holtún

**22) [C] (IOAA) Estrela de Belém**

É chamada de *Grande Conjunção*, a conjunção entre Júpiter e Saturno para observadores na Terra. Considere que Júpiter e Saturno têm orbitas circulares no plano da eclíptica. O tempo entre duas conjunções sucessivas pode variar ligeiramente quando vistas da Terra. No entanto, o intervalo de tempo médio da *Grande Conjunção* é o mesmo para um observador no centro do Sistema Solar.

a) Encontre o período médio, em anos, e ângulo heliocêntrico médio, em graus, entre duas *Grandes Conjunções* sucessivas.

b) A próxima *Grande Conjunção* será em 21 de dezembro de 2020, com elongação de  $30,3^\circ$  a Leste do Sol. Estime em que constelação ocorrerá a conjunção em 21 de dezembro de 2020.

Em 1606, Johannes Kepler determinou que a *Grande Conjunção* poderia ser vista até três vezes no mesmo ano devido aos movimentos retrógrados dos planetas. Ele também determinou que um evento destes aconteceu no ano 7 a.C., e que poderia ter sido o evento comumente conhecido como "A Estrela de Belém". Para os cálculos abaixo, ignore os efeitos da precessão do eixo da Terra.

c) Estime em que constelação ocorreu a *Grande Conjunção* do ano 7 a.C..

d) Na segunda conjunção da série de três conjunções do ano 7 a.C., para um observador na Terra, estime em que constelação estava o Sol.

**23) [C] (IOAA)** Numa tradicional lenda chinesa sobre o amor, Vega e Altair são dois amantes que se encontram uma vez por ano em uma ponte feita de pássaros sobre a Via Láctea. A tabela abaixo mostra alguns parâmetros das duas estrelas. Para esta questão, considere que o sistema de coordenadas é fixo (i.e. não é afetado pela precessão ou pelo movimento do Sol).

Estrela	Ascensão Reta (J2000.0)	Declinação (J2000.0)	Paralaxe (mas)	Movimento próprio		Velocidade Radial (km/s)
				$\mu_\alpha \cos\delta$ (mas/ano)	$\mu_\delta$ (mas/ano)	
Vega	$18^h 36^m 56,49^s$	$+38^\circ 47' 07,7''$	130,23	+200,94	+286,23	-13,9
Altair	$19^h 50^m 47,70^s$	$+8^\circ 52' 13,3''$	194,95	+536,23	+385,29	-26,1

Com base nessas informações, responda as perguntas abaixo.

a) Qual a separação angular entre as duas estrelas?

b) Calcule a distância (em parsecs) entre Vega e Altair.

c) Calcule os ângulos de posição dos vetores de movimento próprio para cada uma das estrelas.

Para os itens de **d** até **g**, considere que a velocidade angular das estrelas na esfera celeste é sempre constante. Esta hipótese é apenas uma simplificação, e não é fisicamente possível.

d) Quantos pontos em comum possuem as trajetórias aparentes das duas estrelas na esfera celeste? Dica: Faça um esboço da esfera celeste para visualizar a situação.

e) Encontre as coordenadas do ponto em comum mais próximo.

f) Encontre em que ano cada uma das estrelas passou/passará por este ponto.

g) Quando Altair estava (ou estiver) neste ponto, qual será sua distância angular até Vega?

h) Encontre as coordenadas dos pontos no espaço tridimensional (se existirem) que foram ou serão visitados por ambas as estrelas. Inclua os dados de velocidade radial nestes cálculos.

## Astrofísica

1) [A] Sabe-se que o olho humano pode ver estrelas de magnitude até +6; no caso do telescópio espacial Hubble, é possível detectar estrelas com magnitude de até +30. Considerando que o alcance do olho humano seja  $d_L$  e o do Telescópio Hubble seja  $d_H$ , determine qual é a distância limite que o Hubble pode observar uma estrela de uma mesma classe espectral.

2) [A] Uma supernova brilha com luminosidade  $10^{10}$  vezes a luminosidade solar. Se esta supernova aparecesse no céu tão brilhante quanto o sol do meio-dia, determine a distância que esta supernova deve estar para ser localizada.

3) [B] Três estrelas têm magnitude visual aparente de +2,0, 1,5 e 3,0.

a) Qual a magnitude visual do conjunto formado por estas três estrelas?

b) Se elas têm uma paralaxe média de  $0,02''$  e as três têm a mesma magnitude visual absoluta ( $M_V$ ), calcule  $M_V$  e as paralaxes individuais.

4) [A] A figura 1 mostra a relação entre a magnitude absoluta e o período para cefeidas clássicas. A figura 2 mostra a curva de luz (magnitude aparente vs. tempo em dias) de uma cefeída localizada em uma galáxia do Grupo Local.

a) Usando as duas figuras, estime a distância da cefeída em relação à Terra.

b) Revise a estimativa, assumindo que a extinção interestelar na direção da cefeída é  $A = 0,25$  mag.

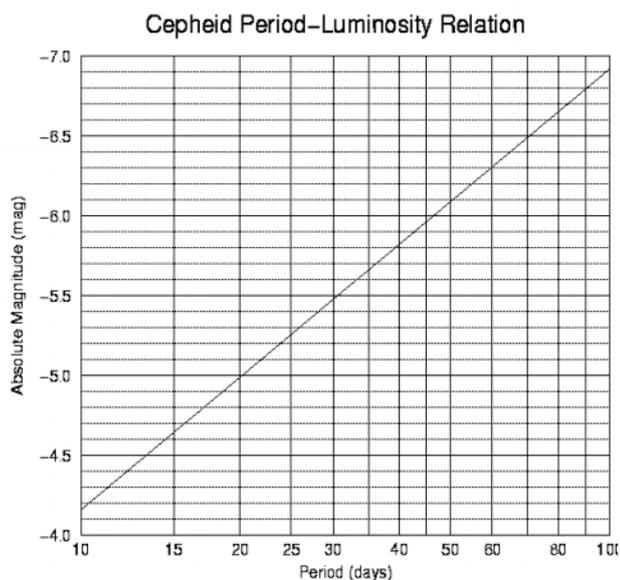


Figura 1

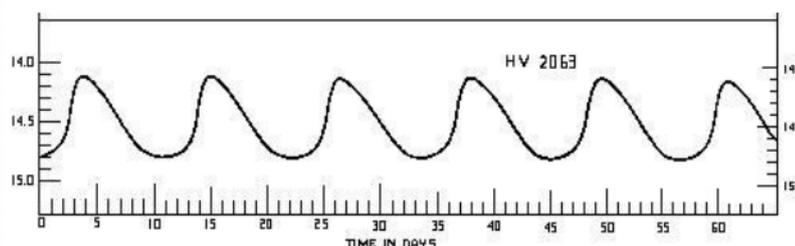


Figura 2

5) [B] (*Seletiva*) Em alguma época do ano é possível observar três estrelas de magnitudes aparentes iguais, cujas coordenadas são:

Estrela 1 ( $\alpha_1 = 6^{\text{h}}30^{\text{m}}$ ,  $\delta_1 = +35^{\circ} 20'$ )

Estrela 2 ( $\alpha_2 = 6^{\text{h}}30^{\text{m}}$ ,  $\delta_2 = +34^{\circ} 40'$ )

Estrela 3 ( $\alpha_3 = 6^{\text{h}}24^{\text{m}}$ ,  $\delta_3 = +35^{\circ} 20'$ )

As estrelas são observadas através de um telescópio de abertura  $D = 200$  mm e razão focal  $f/10$ , em cujo plano focal é colocada uma câmera CCD de dimensões  $4096 \times 4096$  pixels.

Considere cada pixel de forma quadrada com  $6,4 \mu\text{m}$  de lado.

a) É possível se obter uma imagem em que a estrela 1 e a estrela 2 apareçam juntas? Justifique sua resposta.

b) É possível se obter uma imagem em que a estrela 1 e a estrela 3 apareçam juntas? Justifique sua resposta.

**6) [A] (IOAA) Deflexão de fótons de rádio no campo gravitacional dos corpos do sistema solar**

A. Eddington e F. Dyson, do Príncipe, e C. Davidson e A. Crommelin, de Sobral, Brasil, mediram a deflexão da luz proveniente de estrelas aparentemente muito próximas do Sol durante o eclipse solar total em 1919. A deflexão encontrada concordou com o valor teoricamente previsto de  $1,75''$ .

Um raio de luz (ou fóton) que passa perto do Sol a uma distância  $d$  é desviado de um ângulo

$$\Delta\theta \sim \frac{4GM_{\odot}}{dc^2}$$

A precisão atual da técnica VLBI (Very Long Baseline Interferometry) na faixa de comprimento de onda de rádio é de  $0,1$  mas (milissegundo de arco). É possível detectar a deflexão dos fótons de rádio de um quasar devido ao campo gravitacional (a) de Júpiter, (b) da Lua? Estime o ângulo de deflexão em ambos os casos e **marque "SIM" ou "NÃO" na folha de respostas.**

**7) [A] (IOAA) O buraco negro supermassivo no centro da Via Láctea e M87**

A primeira imagem de um buraco negro foi construída recentemente pela equipe internacional do Event Horizon Telescope (EHT). A área da imagem circunda o buraco negro supermassivo no centro da galáxia M87. As observações que resultaram na imagem final foram realizadas em um comprimento de  $\lambda = 1,3$  mm, onde a extinção interestelar não é excessivamente grande.

a) O quão grande um instrumento precisa ser para resolver a sombra (na verdade, o diâmetro de captura de fótons, que é três vezes o raio do horizonte de eventos) de um buraco negro supermassivo no centro de uma galáxia? Expresse o resultado em função da distância  $d$  e da massa  $M$  do buraco negro.

b) Indique o tamanho do instrumento em unidades de raio da Terra para

i. o buraco negro supermassivo no centro de M87 ( $d_{\text{BH-M87}} = 5,5 \times 10^7$  anos-luz,  $M_{\text{BH-M87}} = 6,5 \times 10^9 M_{\odot}$ ).

ii. e Sgr A\*, o buraco negro supermassivo da nossa própria galáxia, a Via Láctea ( $d_{\text{Sgr A}^*} = 8,3$  kpc,  $M_{\text{Sgr A}^*} = 3,6 \times 10^6 M_{\odot}$ ).

c) Que tipo de tecnologia é necessária para o desenvolvimento de tal instrumento?

- A) Lente gravitacional usando matéria escura.                      B) Interferometria com uma série de radiotelescópios.  
 C) Desaceleração de fótons em um ambiente denso.            D) Redução do efeito das distorções da frente de onda.  
 E) Focalização de neutrinos com campos eletromagnéticos fortes.

**8) [B] (IOAA) Pulsações de Cefeidas**

A estrela  $\beta$ -Doradus é uma estrela variável Cefeida com um período de pulsação de 9,84 dias. Vamos fazer uma simplificação na qual a estrela brilha mais quando está mais contraída (raio  $R_1$ ) e menos brilhante quando está mais expandida (raio  $R_2$ ). Considere que a estrela mantém sua forma esférica, e que se comporta com um corpo negro durante todo seu ciclo. A magnitude bolométrica da estrela varia de 3,46 a 4,08. A partir de medidas Doppler, sabemos que durante a pulsação a superfície da estrela se expande e se contrai a uma velocidade radial média de  $12,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Ao longo do período de pulsação, o pico da radiação térmica intrínseca da estrela varia de  $531,0 \text{ nm}$  a  $649,1 \text{ nm}$ .

- a) Encontre a razão dos raios da estrela nos seus estados de maior contração e expansão ( $R_1/R_2$ ).  
 b) Encontre o raio da estrela (em metros) nos seus estados de maior contração e expansão ( $R_1$  e  $R_2$ ).  
 c) Calcule o fluxo  $F_2$  da estrela no seu estado de maior expansão.  
 d) Encontre a distância  $D_{\text{star}}$  até a estrela, em parsecs.

**9) [A] (Seletiva)** Estime o número de estrelas num aglomerado globular de  $40 \text{ pc}$  de diâmetro, sabendo a velocidade de escape em sua borda é de  $6 \text{ km/s}$ . Considere que a maioria dos membros do aglomerado são parecidos com o Sol.

**10) [B] (IOAA) Missão Mars Orbiter**

A sonda indiana Mars Orbiter Mission (MOM) foi lançada usando o Veículo Lançador de Satélites Polar (PSLV) em 5 de novembro de 2013. A carga útil da MOM (corpo + instrumentos) era de 500 kg, e a sonda carregava 852 kg de combustível. Ela foi inicialmente colocada numa órbita elíptica ao redor da Terra, com perigeu a 264 km de altitude e apogeu a 23904 km de altitude. Após aumentar sua órbita em 6 (seis) vezes, a MOM foi transferida para uma órbita de injeção trans-Marciana (órbita de Hohmann).

O primeiro destes aumentos de órbita foi realizado disparando-se os motores por um curto período de tempo, perto do perigeu. Os motores foram disparados para mudar a órbita, mas sem mudar o plano da órbita, e sem alterar o perigeu. Isso deu um impulso de  $1,73 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  ao satélite. Despreze a mudança de massa durante a queima de combustível.

- Qual será a altitude  $h_a$  do novo apogeu depois desse disparo do motor?
- Encontre a excentricidade ( $e$ ) da nova órbita e o novo período orbital ( $P$ ) da MOM, em horas, após realizado esse disparo.

**11) [B] (Seletiva)** Um sistema exoplanetário possui um planeta orbitando sua estrela hospedeira em uma órbita circular, realizando trânsitos com período de 205 dias. A estrela emite a maior quantidade de energia no comprimento de onda  $\lambda = 651 \text{ nm}$ , e seu raio é  $0,75 R_{\odot}$ . Sabe-se que esta estrela está na sequência principal e obedece a uma razão massa-luminosidade tipo  $L \propto M^{3,5}$

- Encontre a temperatura efetiva da estrela.
- Encontre a luminosidade da estrela em luminosidades solares.
- Encontre o raio do planeta, sabendo que a profundidade máxima da curva de luz no trânsito equivale a um aumento de  $2,1 \times 10^{-4} \text{ mag}$ . Despreze qualquer emissão proveniente do planeta.
- Encontre a separação entre a estrela e o planeta. Considere que a massa do planeta é muito menor que a da estrela.
- Observações espectroscópicas revelaram que o exoplaneta não possui atmosfera, possui rotação rápida e seu albedo é de 0,36. Encontre sua temperatura de equilíbrio. Considere que ele é um emissor perfeito.

**12) [A] (Seletiva)** Considere um telescópio refrator cuja distância focal da ocular ( $f_{oc}$ ) é igual a 1 cm.

- Qual deve ser o comprimento focal da objetiva ( $f_{ob}$ ) para que esse telescópio tenha um aumento ( $A$ ) igual a 150?
- Qual o comprimento ( $L$ ) desse telescópio?

Um detector CCD é colocado no foco primário de um telescópio com a mesma lente objetiva descrita acima. O tamanho de cada pixel do CCD é de  $10,0 \mu\text{m}$ . Considere que este telescópio não possui nenhuma lente Barlow e nenhuma ocular acoplada.

- Qual seria a separação angular entre duas estrelas no céu ( $n_{\text{céu}}$ ) sendo que a separação linear entre elas no CCD ( $n_{\text{CCD}}$ ) é de 29 pixels?

**13) [A] (Seletiva)** O índice de cor é utilizado em astrofísica para estimar quantitativamente a cor de um objeto. É definido como a diferença entre as magnitudes do objeto em diferentes partes do espectro eletromagnético. Por exemplo, o índice de cor V-R é definido como a diferença entre a magnitude  $m_V$  medida na faixa espectral V no centro do espectro visível (luz amarelo-verde) e a magnitude  $m_R$  medida na faixa espectral R, na parte vermelha do espectro.

Considere duas estrelas idênticas. A primeira estrela, localizada em uma área de espaço livre de gás e poeira e tem magnitudes  $m_V = 8,72$  e  $m_R = 9,16$ . A segunda estrela está por trás de uma nuvem de gás e poeira, que absorve 32% da luz na banda V e 9% da luz na banda R.

- Calcule os índices de cores V-R das duas estrelas
- A segunda estrela parece mais azulada ou mais avermelhada do que a primeira? Por quê?

**14) [B] (Seletiva)** Sabemos que as partículas de gás presentes na atmosfera apresentam uma ampla distribuição de velocidades. Se a velocidade quadrática média térmica ( $v_{rms}$ ) das partículas de um determinado gás for superior a 1/6 da velocidade de escape ( $v_{esp}$ ), então quase todo este gás irá escapar da atmosfera do planeta. Esse fato nos ajuda a entender um pouco sobre a composição química das atmosferas.

- A partir da energia cinética média de um gás, deduza uma expressão para o peso atômico mínimo ( $A_{min}$ ) para uma molécula diatômica de gás tal que ela não escape da atração de um corpo celeste.
- A partir da equação encontrada, calcule  $A_{min}$  para Plutão.
- Responda se Plutão é capaz de reter  $O_2$  e  $N_2$  e justifique sua resposta.

**Adote:**

$$M_{Plut\tilde{a}o} = 1,30 \cdot 10^{22} \text{ kg}; R_{Plut\tilde{a}o} = 1,18 \cdot 10^3 \text{ km}; T_{Plut\tilde{a}o} = 49 \text{ K}$$

$$\text{Constante gravitacional: } G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

$$\text{Constante de Boltzmann: } k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$$

Peso atômico do oxigênio: 16 uma

Peso atômico do nitrogênio: 14 uma

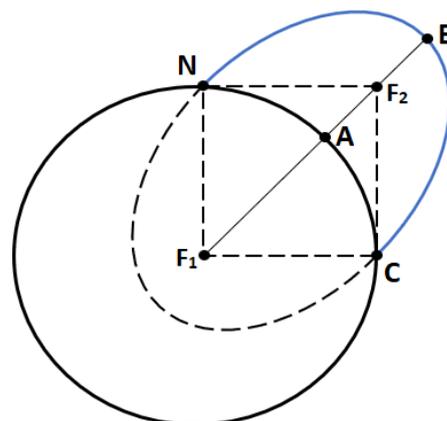
$$\text{Unidade de massa atômica: } uma = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Energia cinética por molécula de gás diatômico: } E = \frac{5}{2} k_B T$$

**15) [B] (OLAA)** Do Polo Norte da Terra, indicado com um N na figura ao lado, um foguete é lançado com uma velocidade  $v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$  de modo que caia no Equador, indicado com um C. Ignore a resistência do ar e a rotação da Terra.

*Adote:*  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da elipse da órbita do foguete.

- Encontre o comprimento do semieixo maior da órbita do foguete.
- Qual é a altura máxima  $h$  que o foguete atinge em relação à superfície da Terra?
- Qual é o tempo de voo do foguete? Considere  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .



**16) [B] (USAAAO)** Considere a seguinte situação: em algum momento do passado, todo o hidrogênio e hélio no Universo foi instantaneamente fundido em hélio em estrelas, e toda a energia produzida foi termalizada em radiação de corpo negro. Considere a densidade bariônica de  $\rho_b = 4,2 \times 10^{-31} \text{ g/cm}^3$ , cujo conteúdo é de 75% de hidrogênio (1 bárion) e 25% de hélio (4 bárions) por massa. A energia de ligação por núcleo de  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  é de 8,8 MeV e que  ${}^4_2\text{H}$  é de 7,1 MeV.

- Qual é a temperatura da radiação de corpo negro desta reação?
- Determine em qual comprimento de onda se encontra o pico da curva de corpo produzida neste processo. Em qual região espectral este pico estaria?
- Em quanto tempo as estrelas levariam para fundir todo o hidrogênio e hélio no Universo, dado que a luminosidade bolométrica média por unidade de volume emitido pelas estrelas hoje é de  $3 \times 10^8 L_{\odot} / \text{Mpc}^3$ ? Faça uma comparação desta idade com o a idade estimada para o Universo (13,7 bilhões de anos).

**17) [B] (EAO) Betelgeuse Quente**

Estime a temperatura média da Terra se o Sol fosse substituído por Betelgeuse no centro do Sistema Solar. Você pode considerar que a órbita Terrestre permaneça a mesma, e que a Terra se comporta como um corpo negro ideal. Despreze o Efeito Estufa. Adote: A magnitude aparente média de Betelgeuse é  $m_V = 0,5$ , a correção bolométrica é  $BC = M_{bol} - M_V = -1,8$  e a estrela se localiza a uma distância  $D = 220 \text{ pc}$ .

**18) [B] (Seletiva)** A Figura 1 apresenta as magnitudes aparentes  $m_C$  de variáveis Cefeidas na Grande Nuvem de Magalhães (LMC) em função do logaritmo do período de variação de luminosidade  $P$  (em dias). A reta ajustada neste gráfico obedece a uma relação linear do tipo  $m_C = a \log P + b_{LMC}$  (equação 1).

a) A partir desse gráfico, determine os valores de  $a$  e  $b_{LMC}$ .

Na realidade, estamos interessados nas magnitudes absolutas das Cefeidas. Para isso, precisamos conhecer a distância até a LMC. Iremos adotar o valor de  $d_{LMC} = 50$  kpc.

b) Utilize essa informação para reescrever a equação 1 na forma  $M_C = a \log P + M_0$ , onde  $M_C$  é a magnitude absoluta da Cefeida. Determine os valores de  $a$  e  $M_0$ .

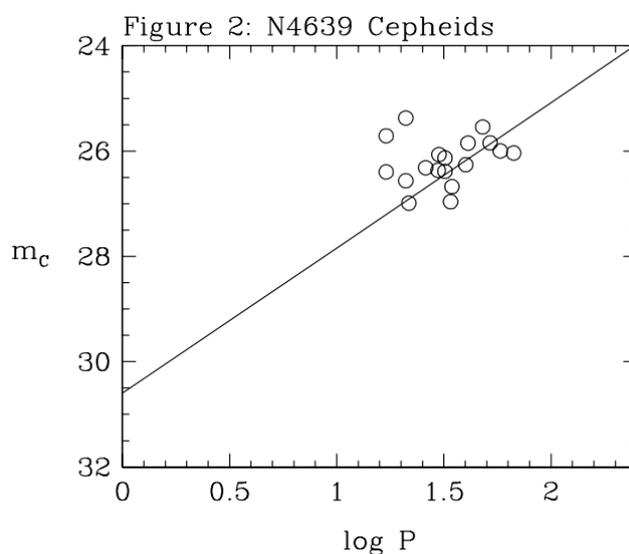
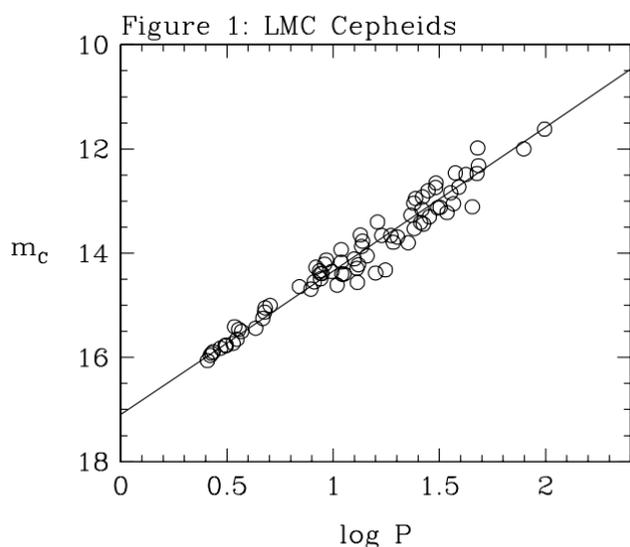
c) Qual o período de pulsação de uma Cefeida com magnitude absoluta  $M_0$ ?

A Figura 2 apresenta a relação entre a magnitude aparente  $m_C$  e  $\log P$  para as variáveis Cefeidas da galáxia NGC 4639, com base em dados obtidos em 1997 pelo Telescópio Espacial Hubble. A reta ajustada neste gráfico obedece a uma relação linear do tipo  $m_C = a \log P + b_{NGC}$ . O coeficiente  $a$  é o mesmo do item (a), mas o coeficiente  $b$  é diferente porque as distâncias são diferentes.

d) Determine o valor de  $b_{NGC}$ .

e) Obtenha o valor da distância à NGC 4639.

f) Em 1990, uma supernova foi observada em NGC 4639, atingindo magnitude aparente visual  $m_{SN} = +12,61$ . Qual a magnitude absoluta  $M_{SN}$  dessa supernova?



**19) [B] (EOA) Astrônomo alienígena**

Um astrônomo alienígena que vive no centro da galáxia de Andrômeda observa a Via Láctea para estudar sua rotação através do efeito Doppler. Quais são os valores máximo e mínimo de *redshift* que ele pode observar nas extremidades da Via Láctea? Considere que a nossa galáxia leva 225 milhões de anos para fazer uma revolução, que seu raio é de 52 850 anos-luz, que a distância entre Andrômeda e a Via Láctea é de 778 kpc e que ambas estão se aproximando uma da outra a uma velocidade de 110 km/s. A latitude galáctica de Andrômeda é de  $-21,3^\circ$ .

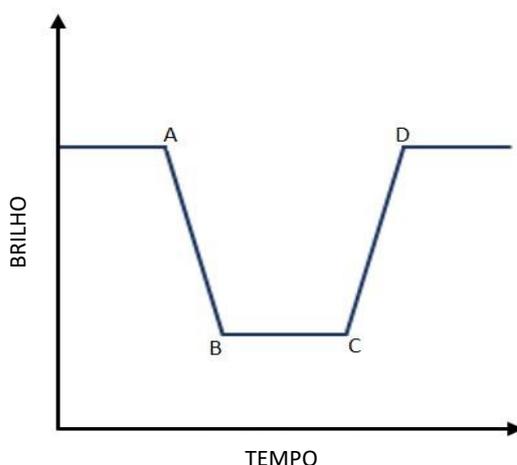
Dica: considere que a Via Láctea se comporta como um disco rígido.

**20) [C] (OLAA) Detecção de exoplanetas**

Um exoplaneta é um planeta que reside fora do nosso sistema solar. Em particular, vamos ver o sistema planetário da estrela TRAPPIST-1.

TRAPPIST-1 é uma estrela anã de tipo espectral M8 V, a uma distância de 12 pc na constelação de Aquário. Em 2015, uma equipe de astrônomos usou o telescópio TRAPPIST, localizado no Observatório de La Silla, no deserto do Atacama, Chile, para estudar o TRAPPIST-1. Através do uso de trânsitos planetários, foram encontrados três planetas que orbitam em torno desta estrela. Em 22 de fevereiro de 2017, foi anunciada a descoberta de outros quatro planetas que orbitam o TRAPPIST-1, adicionando um total de sete planetas que orbitam esta estrela.

A *figura 1* mostra a curva de luz de TRAPPIST-1 sendo eclipsada pelo planeta TRAPPIST-1g. O tempo decorrido entre o primeiro contato (ponto A) e o último contato (ponto D) é de 1,19 hora e o tempo decorrido entre os pontos B e C é de 0,99 hora. Para as perguntas seguintes, suponha que as órbitas sejam circulares.



*figura 1*

a) Calcule o raio  $R$  de TRAPPIST-1 e também o raio  $r$  de TRAPPIST-1g. Considere que o plano orbital do sistema TRAPPIST-1 é paralelo à nossa linha de visada e que a velocidade tangencial do TRAPPIST-1g é  $v = 4,15 \times 10^4 \text{ m/s}$ .

Agora considere que a magnitude aparente de TRAPPIST-1 quando não é eclipsada por nenhum dos sete planetas do sistema é  $m_1 = 13,43$ .

b) Calcule a temperatura do TRAPPIST-1.

c) Encontre a expressão analítica, em função de  $R$ ,  $r$  e  $m_1$ , para calcular a magnitude aparente  $m_2$  quando o sistema estiver entre os pontos B e C.

A zona habitável é a região onde a radiação permite a presença de água no estado líquido. Considere que a água evapora a  $100^\circ\text{C}$  e congela a  $0^\circ\text{C}$ .

d) Use os dados da *tabela 1* para calcular a massa da estrela TRAPPIST-1. Em seguida, preencha os demais espaços da tabela com as informações que faltam referentes ao período orbital (em dias) e raio orbital (em ua) dos sete exoplanetas de TRAPPIST-1.

e) Os planetas giram rapidamente em torno de seus próprios eixos e toda a energia absorvida por eles é reemitida como radiação do corpo negro. Supondo que o albedo de cada um dos planetas seja igual a  $a = 0,1$ . Quais planetas são encontrados dentro da zona habitável?

O inovador *Starshot* (Tiro estelar) é um projeto que pretende desenvolver micro naves espaciais capazes de viajar a 20% da velocidade da luz.

Considere que a aceleração das micro naves para alcançar os 20% da velocidade da luz é de  $35 \text{ m/s}^2$ .

f) Se usássemos uma dessas micro naves para chegar a TRAPPIST-1, estime o tempo mínimo de duração desta viagem.

**Tabela 1**

Planeta	Período (dias)	Raio orbital (UA)
1b	1,51	
1c		0,015
1d	4,04	
1e	6,09	0,028
1f	9,2	
1g	12,35	0,045
1h		0,059

**21) [A] (IOAA) Forno de Radiação Cósmica de Fundo**

Como o corpo humano é feito principalmente de água, ele é muito eficiente na absorção de fótons de micro-ondas. Considere que o corpo de um astronauta é um absorvedor esférico perfeito com massa  $m = 60 \text{ kg}$  com densidade média e calor específico iguais ao da água, ou seja,  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$  e  $c = 4200 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ . Adote que a energia média do fóton é  $\varepsilon = 3 k_B T$ .

a) Qual é a taxa aproximada, em watts, da energia Radiação Cósmica de Fundo (CMB) que um astronauta no espaço intergaláctico absorveria? A distribuição de energia espectral da CMB pode ser aproximada como a radiação de um corpo negro de temperatura  $T_{\text{CMB}} = 2,728 \text{ K}$ .

b) Aproximadamente, quantos fótons da CMB o astronauta absorveria por segundo?

c) Ignorando outras trocas de energia, quanto tempo levaria a CMB para elevar a temperatura do astronauta 1 K?

**22) [A] (IOAA) Melhorando um telescópio de reflexão comum**

Um estudante possui um telescópio *Cassegrain* de qualidade média, de espelhos primário e secundário com camadas de alumínio com refletividade  $\varepsilon_1 = 91 \%$ .

a) Qual será a mudança na magnitude limite deste telescópio substituindo-se os revestimentos espelhados por outros de refletividade *premium*  $\varepsilon_2 = 98 \%$ ?

b) Considere que o estudante também use um espelho diagonal, também com refletividade  $\varepsilon_1$ , no telescópio original. Qual será a melhoria se ele substituir esta peça com um modelo  $\varepsilon_3 = 99 \%$  (espelho dielétrico), combinado com os novos espelhos  $\varepsilon_2$ ? OBS: Um espelho diagonal é um espelho plano inclinado em  $45^\circ$  em relação ao eixo óptico.

c) As diferenças encontradas nos itens (a) e (b) são perceptíveis pelo olho humano? Justifique.

**23) [B] (OLAA) Matéria escura em uma galáxia**

Vera Cooper Rubin foi uma astrônoma americana, pioneira em medir a rotação de estrelas dentro de uma galáxia. Suas medições são evidências da existência de matéria escura.

A atração gravitacional da matéria observável é muito fraca para justificar as velocidades de rotação das galáxias, isso implica que deve haver massa não visível em algum lugar dentro ou ao redor das galáxias que permita que essas velocidades existam. Essa matéria oculta é o que é conhecida como matéria escura.

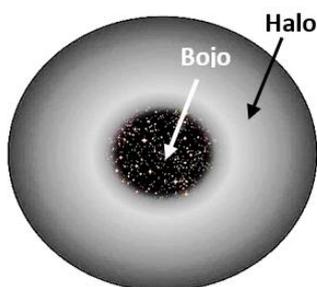


Figura 1

Para esse problema, as galáxias observadas por Rubin serão modeladas da seguinte forma: um bojo esférico de raio  $R_b$  cercado por um halo esférico, como mostra a Figura 1. Em todo o problema, ela considera que as estrelas são corpos pontuais de massa  $m$  uniformemente distribuídos no bojo, com densidade numérica  $n$  e que se movem em órbitas circulares. A massa das estrelas encontradas no halo é insignificante.

a) Se a galáxia consiste apenas de estrelas, encontre a velocidade das estrelas  $v(r)$  em função de sua distância  $r$  ao centro da galáxia. Considere os casos  $r < R_b$  e  $r \geq R_b$ .

b) Faça um esboço da função  $v(r)$  que você obteve no item anterior.

A galáxia NGC7537 está a uma distância de 38 Mpc e sua magnitude aparente é  $m = 15,7$ . Suponha que a galáxia NGC7537 possui apenas estrelas semelhantes ao Sol.

c) Estime o número de estrelas na galáxia NGC7537.

A Tabela 1 mostra os valores observados da velocidade de rotação para algumas estrelas e o diâmetro angular de suas órbitas ao redor do centro de NGC7537. Considere que o diâmetro angular do bojo desta galáxia é  $20''$ .

d) Com os dados da Tabela 1, faça um gráfico da velocidade em função da distância do centro da galáxia (medida em kpc).

e) Qual é a função  $v(r)$  para a galáxia NGC7537?

f) Estime a massa total do bojo da galáxia NGC7537. Expresse sua resposta em massas solares.

A discrepância entre os gráficos obtidos nos itens (b) e (d) indica a existência de matéria escura na galáxia. Suponha que o perfil de densidade esférica da matéria escura é definido pela seguinte função:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha$$

g) Determine o expoente  $\alpha$ , necessário para obter um gráfico como o do item (d) para  $r > R_b$ .

Embora a existência de matéria escura seja uma solução aceita para o problema da curva de rotação das galáxias, se pode sugerir uma solução alternativa, modificar as Leis de Newton. A dinâmica newtoniana modificada (MOND na sigla em inglês) é uma hipótese que postula que a Segunda Lei de Newton pode ser reescrita como  $F = ma\mu$  onde  $\mu$  é uma função com a propriedade de  $\mu = 1$  para  $\frac{a}{a_0} \gg 1$ ; e  $\mu = \frac{a}{a_0}$  para  $\frac{a}{a_0} \ll 1$ , onde  $a$  é a aceleração e  $a_0$  é uma constante que determina a transição entre a gravitação de Newton e a MOND.

h) Mostre que essa reformulação leva a que a velocidade de rotação seja constante no halo esférico de uma galáxia quando  $a \ll a_0$ .

Tabela 1

Diâmetro angular (")	V (km/s)
2	14,32
4	29,48
6	46,06
8	58,04
10	73,5
12	91,1
14	106,76
16	121,48
18	134,86
20	150,14
22	149,72
28	150,72
34	151,14
40	149,2
46	151,22
52	148,62
58	151,68
64	150,28
70	150,28
76	150,62

**24) [B] (IOAA) A Longa viagem de um próton solar**

Um próton com energia cinética de 1 GeV está se propagando da superfície do Sol em direção à Terra. Desprezando o campo magnético do Sol, calcule o tempo de viagem deste próton como visto da Terra.

**25) [C] (IOAA) Distância ao Aglomerado de Coma**

O aglomerado de galáxias de Coma, *Abell 1656*, possui diâmetro angular aparente de aproximadamente 100 minutos de arco, e contém mais de 1000 galáxias individuais, a maioria são elípticas anãs ou gigantes. Elas se movimentam ao redor do centro de massa do aglomerado em órbitas aproximadamente circulares. A tabela abaixo apresenta medidas das velocidades radiais de algumas galáxias do aglomerado.

Nº	$v_r$ (km/s)						
1	6001	6	7116	11	7156	16	7111
2	7666	7	7004	12	7522	17	8292
3	6624	8	4476	13	7948	18	5358
4	5952	9	6954	14	4951	19	4957
5	5596	10	8953	15	7797	20	7183

- a) Calcule a distância ao aglomerado a partir da velocidade radial médias das galáxias listadas na tabela acima.
- b) Estime o diâmetro, em Mpc, do aglomerado.
- c) O Teorema de Virial afirma que, se um aglomerado de galáxias está em equilíbrio dinâmico, então a energia cinética média  $\langle K \rangle$  e a energia potencial gravitacional média  $\langle U \rangle$  obedecem à relação:

$$-2\langle K \rangle = \langle U \rangle$$

Use o Teorema de Virial para provar que a massa  $M$  do aglomerado *Abell 1656*, também conhecida como Massa de Virial, pode ser escrita como:

$$M = \frac{5R}{G} \sigma_r^2$$

Onde  $\sigma_r^2$  é a dispersão de velocidades do aglomerado.

**Note e Adote:**

- O aglomerado *Abell 1656* é esférico e tem distribuição uniforme de galáxias de massas iguais a  $m$ .
- A energia potencial média, nestas condições, é dada por  $\langle U \rangle = -\frac{3}{5} \cdot \frac{GMm}{R}$ , onde  $R$  é o raio do aglomerado.
- Use a aproximação para a dispersão como:  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

- d) Usando os dados da tabela, estime a Massa de Virial do aglomerado *Abell 1656*, em massas solares.
- e) A luminosidade total do aglomerado *Abell 1656* é  $L \approx 5 \times 10^{12} L_\odot$ . Calcule a razão massa-luminosidade do aglomerado, em unidades de massa solar por luminosidade solar.

**26) [B] (IOAA) Universo Primordial**

Modelos cosmológicos indicam que a densidade de energia de radiação  $\rho_r$  no Universo é proporcional a  $(1+z)^4$ , e que a densidade de energia de matéria  $\rho_m$  é proporcional a  $(1+z)^3$ , onde  $z$  é o *redshift*. O parâmetro adimensional de densidade  $\Omega$  é dado por  $\Omega = \rho/\rho_c$ , onde  $\rho_c$  é a densidade crítica de energia do Universo. No Universo atual, os parâmetros de densidade de radiação e de matéria são  $\Omega_{r_0} = 10^{-4}$  e  $\Omega_{m_0} = 0.3$ , respectivamente.

- a) Calcule o *redshift*  $z_e$  no qual as densidades de energia da radiação e matéria são iguais.
- b) Supondo que a radiação do Universo primordial tem um espectro de corpo negro com temperatura 2,732 K, estime a temperatura  $T_e$  dessa radiação no *redshift*  $z_e$ .
- c) Estime a energia típica  $E_\nu$  (em eV) dos fótons da radiação emitida no *redshift*  $z_e$ .

**27) [C] (EAO) Cemitério Aeroespacial**

Uma vez que um satélite deixe de funcionar após suas atividades (ou outras razões), existem duas opções para o seu último destino.

- O satélite é enviado para uma região conhecida como cemitério aeroespacial (localização na figura 1).

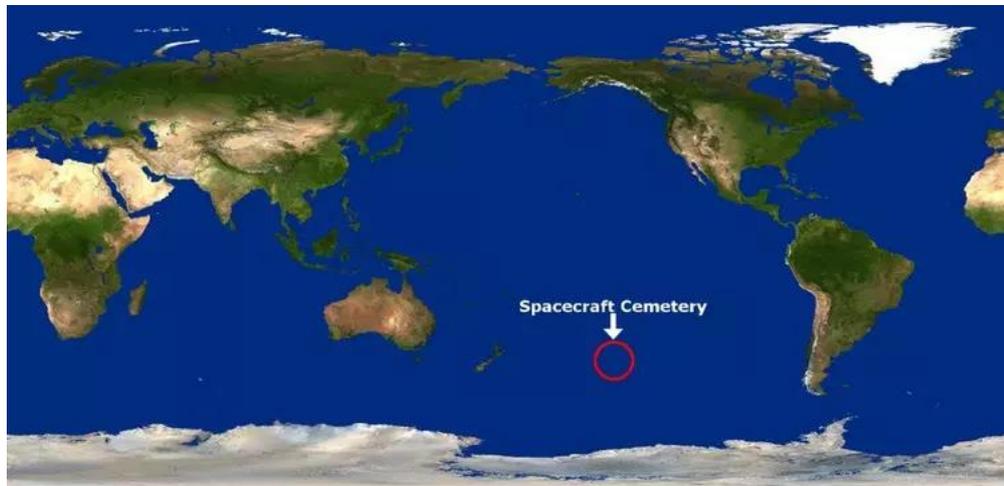


Figura 1

- O satélite é enviado para uma “órbita túmulo”, localizado a uma altura de 36 050 km da superfície terrestre.

Suponha que um dos satélites geoestacionários parou de funcionar. Nós iremos investigar quais das opções acima este satélite gastará menos energia: enviando-o para o cemitério ou para a órbita túmulo (neste caso, ele cairia novamente para a órbita geoestacionária num período de centenas de anos). Assuma que todas as mudanças de velocidade são instantâneas.

a) Determine a altura da órbita geoestacionária.

b) Considerando que a massa do satélite é desprezível em relação à Terra, use a conservação de energia para determinar a equação *Vis Viva*. Esta equação descreve a velocidade do satélite em termos da distância à Terra e o semieixo maior de sua órbita.

c) A Transferência de Hohmann é uma manobra usada para transportar o satélite de uma órbita 1 para a órbita 3 via órbita elíptica, conforme pode ser visto na figura 2. Determine as expressões necessárias que calculam a mudança de velocidade necessária para que a Transferência de Hohmann seja efetuada e apresente uma expressão para a mudança total de velocidade.

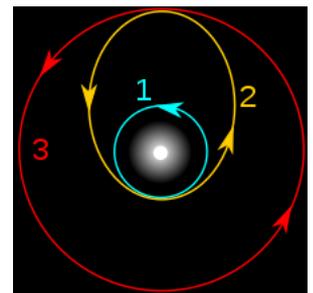


Figura 2

d) Calcule a mudança de velocidade necessária para transportar o satélite para a “órbita túmulo”

e) Calcule a mudança de velocidade necessária para que o satélite seja enviado ao cemitério de aeronaves. Despreze os efeitos atmosféricos e assumo que o satélite seja transportado ao cemitério por uma transferência de Hohmann.

f) Encontre a altura limite na qual seja mais barato enviar satélites em desuso para o cemitério de aeronaves na Terra.

**28) [B] (EAO) Chuva de Meteoros**

Chuva de meteoros é um evento celeste em que um certo número de meteoros é observado irradiando um ponto do céu noturno (chamado de radiante). Eles resultam da interação entre a atmosfera terrestre e meteoroides originados de um cometa. Estes fragmentos são produzidos a partir da evaporação de gelo presente em cometas quando este se aproxima do Sol. Assim sendo, chuvas de meteoros são eventos anuais que ocorrem em pontos em que a órbita terrestre cruza com a trajetória de um cometa.

Eta Aquáridas e Oriônidas são chuvas de meteoros associados ao cometa Halley. Respectivamente, elas ocorrem em maio e outubro, são de baixa intensidade, mas duram por um longo período (cerca de um mês). Nos tópicos a seguir, você pode assumir que a órbita da Terra é circular, com velocidade de  $v_{\text{TERRA}} = 29,8 \text{ km/s}$ .

- Qual é a velocidade dos meteoroides de Eta Aquáridas (em relação ao Sol) quando estes entram na região de influência da Terra? Considere que cada meteoróide faz a mesma trajetória do cometa Halley, que possui semieixo maior de  $a = 17,8 \text{ u.a.}$  e excentricidade  $e = 0,967$ .
- Obtenha uma expressão para o momentum angular total por unidade de massa ( $\ell$ ) de um único meteoróide. Dê a resposta final em termos de  $a$ ,  $e$ ,  $G$  e  $M_{\text{SOL}}$
- Assim como feito em (a), obtenha a velocidade do meteoróide em relação à Terra.

## 29) [C] (EAO) Estrela de Nêutrons

Estrelas de nêutrons são objetos compactos compostos praticamente por nêutrons. Sua massa varia entre 1,4 e 3 massas solares. Neste problema, vamos estimar o raio e a máxima velocidade angular de rotação de uma estrela de nêutrons com massa de  $1,5 M_{\text{SOL}}$  usando um modelo simples.

Considere que estrelas de nêutrons são corpos rígidos que consistem apenas de nêutrons. O número de nêutrons pode ser determinado a partir do Princípio de Exclusão de Pauli, descrito pela equação a seguir,

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4\pi n_F^3}{3}$$

Aqui,  $n_F$  é o maior número quântico de ocupação de nêutrons em uma dada estrela de nêutrons. A energia de cada partícula pode ser expressa através da fórmula,

$$E(n) = \frac{h^2 n^2}{8mV^{2/3}}$$

Sendo  $n$  o número quântico de nêutrons,  $h$  a constante de Planck e  $V$  o volume de uma estrela de nêutrons. A densidade média de energia de uma estrela de nêutrons em relação a energia de um nêutron em seu maior nível de energia é

$$\rho_E = \frac{9}{20\pi} \frac{N}{R^3} E(n_F)$$

Onde  $R$  é o raio da estrela.

- Determine a pressão de degenerescência (pressão interna em relação a energia do nêutron) de uma estrela de nêutrons
- Encontre a energia potencial gravitacional de uma estrela de nêutrons considerando distribuição uniforme de massa.
- Assumindo que não há outros meios de energia interna, encontre o raio de uma estrela de nêutrons com massa  $M = 1,5 M_{\text{SOL}}$  em km.
- Considerando o item anterior, encontre a densidade de uma estrela de nêutrons assumindo que é um corpo rígido. Dê a resposta em peta ( $10^{15}$ )  $\text{kg/m}^3$ .
- Determine a velocidade angular máxima assumindo que a energia interna e o formato de uma estrela de nêutrons dos itens anteriores permaneçam constantes.

*Dica: considere a seguinte expressão para a pressão dada a energia interna  $U$  e volume  $V$ ,*

$$P = - \frac{\partial U}{\partial V}$$

**30) [B] (IOAA) Radiação Cósmica**

Durante estudos sobre a radiação cósmica, uma partícula neutra instável chamada méson  $\pi^0$  foi identificada. A massa de repouso do méson  $\pi^0$  é muito maior do que a massa de repouso do elétron. Os estudos revelaram que, durante o seu voo, o méson  $\pi^0$  se desintegra em dois fótons. Em uma situação particular, um destes fótons tem a máxima energia possível  $E_{máx}$  e o outro, conseqüentemente, tem a mínima energia possível  $E_{mín}$ .

Encontre uma expressão para a velocidade inicial do méson  $\pi^0$  em função de  $E_{máx}$  e  $E_{mín}$ . Considere como conhecidas a velocidade da luz  $c$  e a relação entre energia e momento para partículas relativísticas

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

**31) [B] (Seletiva)** Múons são partículas subatômicas com massa  $105,7 \text{ MeV}/c^2$  e tempo de vida de  $2,2 \times 10^{-6}$  segundos. Na Terra, podemos observar os múons produzidos por colisões de raios cósmicos com moléculas da atmosfera superior, a aproximadamente 20 km da superfície. Os múons são produzidos com velocidade  $0,998 c$  e o fluxo de medido ao nível do mar é de  $10\,000 \text{ múons}/\text{m}^2 \cdot \text{min}$ . Calcule o fluxo de múons na região onde são produzidos.

**32) [C] (USAAAO)** M15 é um aglomerado globular localizado na constelação de Pegasus. O diagrama H-R<sup>1</sup> do aglomerado é mostrado na figura 1. Considerando que a relação massa-luminosidade para estrelas da Sequência Principal é dado por  $L/M^3 = \mathbb{C}$ , sendo  $\mathbb{C}$  uma constante, responda as questões a seguir. Ignore efeitos como avermelhamento interestelar e efeitos de extinção de poeira.

a) Dado que todas as estrelas são formadas ao mesmo tempo, estime a idade do aglomerado globular. O índice de cor do Sol é  $(B - V)_{\odot} = 0,65$  e seu tempo de vida na Sequência Principal é de 10 bilhões de anos.

b) Estime a distância deste aglomerado globular em relação à Terra. Dê sua resposta em parsec. Considere que a magnitude absoluta do Sol (na faixa visível) é 4,83.

c) Dado que as estrelas gastam cerca de 10% do seu tempo de vida na Sequência Principal na fase pós Sequência Principal, encontre a massa da estrela mais massiva no estágio pós Sequência Principal.

d) O número de estrelas em uma faixa de massas pode ser escrito como:

$$N(M_1 \leq M \leq M_2) = A(M_1^{-1,35} - M_2^{-1,35})$$

onde  $A$  é uma constante,  $M_1$  e  $M_2$  estão em massas solares. Assumindo que tenham 515 estrelas presentes na fase pós Sequência Principal, calcule o valor da constante na expressão acima.

e) M15 é um dos aglomerados globulares compactos mais densos já observados na faixa do visível ( $\lambda \approx 5\,500 \text{ \AA}$ ). Inclusive, uma imagem dele pode ser capturada por um telescópio com diâmetro de 10 cm, mas sem resolver as estrelas do centro do aglomerado. Estime um número mínimo de estrelas neste aglomerado. O diâmetro angular de M15 é de 12,3 minutos de arco. Leve em conta que a densidade numérica de estrelas dentro do aglomerado é constante.

*Dica: você pode considerar o aglomerado como um cilindro.*

f) Use suas respostas dos tópicos d) e e) para estimar a massa da estrela menos massiva neste aglomerado. Para esta parte, considere que a massa da estrela mais massiva deste aglomerado seja de  $20 M_{\odot}$ .

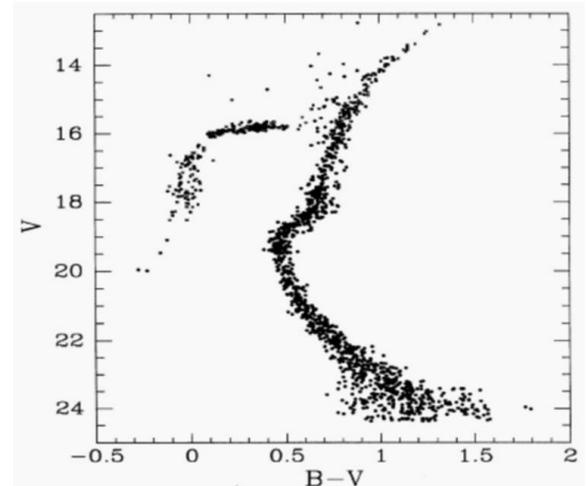


Figura 1

<sup>1</sup> Diagrama Hertzsprung-Russell, que relaciona a magnitude aparente no visível com o índice de cor ou temperatura efetiva.

**33) [C] (BAAO) Jatos superluminais**

A velocidade da luz é considerada a velocidade limite do Universo. Entretanto, alguns pulsos de plasma emitidas em jatos de Núcleos de Galáxias Ativas (AGN) foram observadas se movendo com velocidades transversais aparentes acima da velocidade da luz. Elas são chamadas de velocidades superluminais. Alguns exemplos extremos aparentam se mover com velocidade 6 vezes maior que a velocidade da luz (figura 1).

Isto pode ser explicado pelo fato do jato ser emitido com um ângulo  $\theta$  em relação à linha de visada da Terra, e que a velocidade real do jato ( $v$ ) é menor que  $c$ , cuja escala de velocidade ( $\beta$ ) é definida como  $\beta = v/c$ .

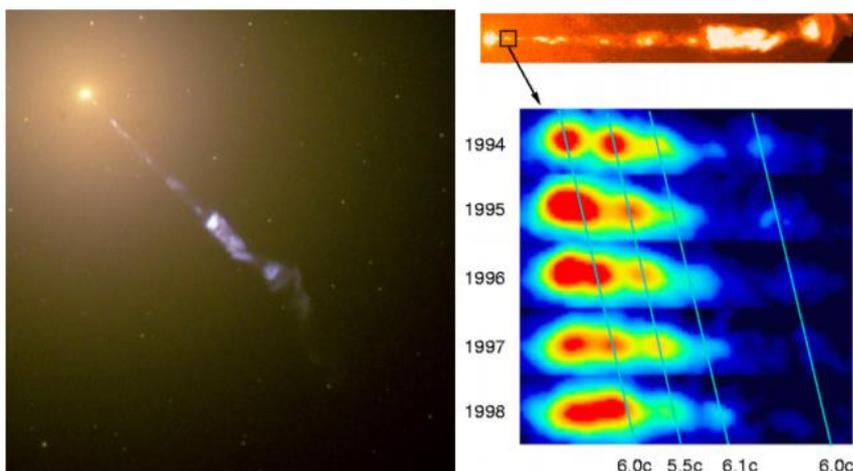


Figura 1: jatos superluminais observados em M87 pelo HST

a) Mostre, usando um desenho apropriado, que a velocidade aparente transversal de um fóton (para um jato cruzando nossa linha de visada) é expresso por:

$$\beta_{ap} = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}$$

b) Determine a relação entre  $\beta$  e  $\theta$  de tal forma que  $\beta_{ap}$  seja maximizado para um dado valor de  $\beta$ . Além disso, determine também o valor mínimo de  $\beta$  necessário para gerar velocidades aparentes superluminais (isto é:  $\beta_{ap}^{máx} > 1$ ).

Os jatos superluminais não se limitam apenas às AGN, já que eles também são observados em sistemas dentro de nossa galáxia. Um caso particular famoso é do *microquasar* GRS 1915+105, que é um sistema binário que emite em raios-X composto por uma pequena estrela orbitando um buraco negro. Um jato simétrico com componentes aproximando e se afastando de nós é observado (como o esperado para jatos que são emitidos de buracos negros), e

o movimento aparente transversal do material destes jatos foi medido usando imageamento em rádio de alta resolução. *Fender et al. (1999)* mediu estes movimentos próprios<sup>2</sup> como  $\mu_a = 23,6 \text{ mas} \cdot \text{dia}^{-1}$  e  $\mu_r = 10,0 \text{ mas} \cdot \text{dia}^{-1}$  para os jatos que se aproximam e se recuam, respectivamente, além da distância á binária, de 11 kpc.

c) Calcule  $\beta_{ap}$  para ambos os jatos, e use a fórmula obtida em b) para calcular o valor mínimo de  $\beta$  para explicar o movimento aparente superluminal.

Na prática, para um dado  $\beta_{ap}$  os valores de  $\beta$  e  $\theta$  são degenerados e é improvável que a orientação do jato seja tal que  $\beta_{ap}$  tenha sido maximizado, portanto o valor no tópico c) é um limite mínimo. Entretanto, desde que sejam dois jatos, então podemos assumir que eles são emitidos por um mesmo evento (e com mesma velocidade, mas com sentidos opostos), nós podemos quebrar tal degenerescência.

d) Dado que  $\mu_a$  e  $\mu_r$  podem ser calculados (em rad/s) como

$$\mu_a = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \cos \theta} \frac{c}{D} \quad \text{e} \quad \mu_r = \frac{\beta \sin \theta}{1 + \cos \theta} \frac{c}{D}$$

Determine uma expressão para a distância  $D$  em função de  $\theta$ ,  $\mu_a$  e  $\mu_r$  (isto é, não depende de  $\beta$ ), e então calcule  $\theta$ .

<sup>2</sup> Medidos em milissegundos de arco por dia.

e) Mostre que  $\beta \cos \theta$  pode ser expresso apenas como função de  $\mu_\alpha$  e  $\mu_r$ , e então use seu valor de  $\theta$  para calcular o valor de  $\beta$ .

Considerando o sistema binário, nós podemos coletar informação sobre as massas dos objetos observando seus períodos e velocidades radiais. Formalmente, a relação é

$$\frac{(M_{\text{BN}} \sin i)^3}{(M_{\text{BN}} + M_*)^2} = \frac{P_{\text{orb}} K_d^3}{2\pi G}$$

onde  $M_{\text{BN}}$  é a massa de um buraco negro,  $M_*$  é a massa da estrela em órbita,  $i$  é a inclinação da órbita,  $P_{\text{orb}}$  é o período orbital e  $K_d$  é a amplitude da curva da velocidade radial. Em geral, a inclinação não pode ser medida; entretanto, assumindo que a órbita é perpendicular aos jatos, então  $i = \theta$  e é possível determinar a massa do buraco negro.

f) Greiner et al. (2001) mediu  $K_d = 140 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $P_{\text{orb}} = 33,5$  dias, e a razão de massa entre ambos os objetos são  $M_{\text{BN}}/M_* = 12.3$ . Considerando que  $i = \theta$ , calcule  $M_{\text{BN}}$ . Dê sua resposta em função de massas solares ( $M_\odot$ ).

### 34) [B] (Seletiva) O Grupo Local de Galáxias

A Tabela 1 traz os dados referentes às 20 galáxias mais brilhantes do Grupo Local. As distâncias e velocidades são relativas à Via Láctea, que para propósitos deste exercício será considerada como situada no centro do Grupo. Considere que a energia potencial gravitacional do sistema de galáxias pode ser expressa por

$$U = - \frac{3 GM^2}{5 \langle R \rangle}$$

a) Utilizando o Teorema do Virial, estime a massa do Grupo Local em unidades de massa solar.

b) Calcule a razão massa-luminosidade para o Grupo Local, em unidades solares.

Tabela 1: Galáxias do Grupo Local

Name	Coordinates B1950	Type	D(kpc)	$M_V$	$V_o(\text{km/s})$	
M31	NGC 224	00 40.0 +40 59	Sb	725	-21.1	-299
Galaxy		17 42.4 -28 55	Sbc	0	-20.6	0
M33	NGC 598	01 31.1 +30 24	Sc	795	-18.9	-180
LMC		05 24.0 -69 48	Irr	49	-18.1	270
IC 10		00 17.7 +59 01	Irr	820	-17.6	-343
NGC6822	DDO 209	19 42.1 -14 56	Irr	540	-16.4	-49
M32	NGC 221	00 40.0 +40 36	E2	725	-16.4	-205
NGC205		00 37.6 +41 25	E5	725	-16.3	-239
SMC		00 51.0 -73 06	Irr	58	-16.2	163
NGC3109	DDO 236	10 00.8 -25 55	Irr	1260	-15.8	403
NGC185		00 36.2 +48 04	E3	620	-15.3	-208
IC1613	DDO 8	01 02.2 +01 51	Irr	765	-14.9	-236
NGC147	DDO 3	00 30.5 +48 14	E4	589	-14.8	-193
Sextans A	DDO 75	10 08.6 -04 28	Irr	1450	-14.4	325
Sextans B	DDO 70	09 57.4 +05 34	Irr	1300	-14.3	301
WLM	DDO 221	23 59.4 -15 45	Irr	940	-14.0	-116
Sagittarius		18 51.9 -30 30	dE7	24	-14.0	140
Fornax		02 37.8 -34 44	dE3	131	-13.0	53
Pegasus	DDO 216	23 26.1 +14 28	Irr	759	-12.7	-181
And VII	Cas Dw	23 24.1 +50 25	dE3	760	-12.0	-307
Leo I	DDO 74	10 05.8 +12 33	dE3	270	-12.0	285

**35) [B] (IOAA) Observando o Sol com o FAST**

O Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope (FAST) é um radiotelescópio de prato único localizado na província de Guizhou, na China. O diâmetro físico do prato é de 500 m, mas durante as observações, o diâmetro efetivo da área coletora é de 300 m.

Considere observações da emissão térmica em rádio da fotosfera do Sol em 3,0 GHz com esse telescópio e um receptor com largura de banda 0,3 GHz.

- Calcule a energia total ( $E_{\odot}$ ) que o receptor coletará durante 1 hora de observação.
- Estime a energia necessária para virar uma página de papel. Considere que a densidade superficial típica do papel é de  $80 \text{ g/m}^2$ .
- Qual dessas energias é maior?

Dica: lembre-se que a Lei de Rayleigh-Jeans é dada por:

$$B_{\nu} = \frac{2k_B T}{c^2} \nu^2$$

que é a potência emitida por unidade de área, por esterradiano, por unidade de frequência.

**36) [C] (IOAA) Um objeto compacto em um Sistema binário**

Astrônomos descobriram um sistema binário extraordinário na constelação de Cocheiro durante o andamento do APOGEE<sup>3</sup>. Nos tópicos a seguir, você tentará analisar os dados e recriar a descoberta.

A equipe de pesquisa está querendo encontrar estrelas compactas em um sistema binário usando a técnica de velocidade radial (RV). Eles examinaram os arquivos de espectros do APOGEE de estrelas individuais e mediram as variações aparentes de RV dentro destes dados. Em cerca de 200 estrelas com as mais altas acelerações, os pesquisadores buscaram por variações fotométricas periódicas nos dados do ASAS-SN<sup>4</sup> que poderiam ser indicativos de trânsitos, variações elipsoidais ou manchas estelares. Depois deste processo, foi analisada uma estrela em particular nomeada 2M05215658+4359220, com uma grande variação de RV e variabilidade fotométrica.

A. A tabela 1 mostra as medidas de velocidade radial de 2M05215658+4359220 durante três épocas de observações espectroscópicas do APOGEE. Aqui, vamos assumir que a variação de sua RV está relacionada à existência de uma companheira não visível. O movimento próprio das estrelas deve ser ignorado.

Tabela 1: Medidas da Velocidade Radial de 2M05215658+4359220 feitas pelo APOGEE

Observação	MJD	RV (km/s)	Incerteza (km/s)
1	56 204,9537	-37,417	0,011
2	56 229,9213	34,846	0,010
3	56 233,8732	42,567	0,010

- Use os dados e um ajuste linear simples para obter uma estimativa inicial da aceleração aparente máxima da estrela

$$a_{\text{máx}} = \left. \frac{\Delta RV}{\Delta t} \right|_{\text{máx}}$$

cuja unidade é  $\text{km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{dia}^{-1}$

- Agora use os dados para obter uma estimativa inicial da massa da companheira não visível.

<sup>3</sup> Sigla para *Apache Point Observatory Galactic Evolution Experiment*.

<sup>4</sup> Sigla para *All-Sky Automated Survey for Supernovae*.

B. Depois de descobrir esta estrela peculiar, astrônomos conduziram mais observações utilizando o TRES<sup>5</sup> do telescópio de 1,5 m no Observatório Fred Lawrence Whipple (FLWO), localizado no Monte Hopkins no Arizona, EUA. A tabela 2 apresenta as medidas de RV usando este instrumento.

Tabela 2: Medidas da Velocidade Radial de 2M05215658+4359220 feitas pelo TRES

MJD	RV (km/s)	Incerteza (km/s)
58 006,9760	0	0,075
58 023,9823	-43,313	0,075
58 039,9004	-27,963	0,045
58 051,9851	10,928	0,118
58 070,9964	43,782	0,075
58 099,8073	-30,033	0,054
58 106,9178	-42,872	0,135
58 112,8188	-44,863	0,088
58 123,7971	-25,810	0,115
58 136,6004	15,691	0,146
58 143,7844	34,281	0,087

c) Faça um gráfico relacionando a variação de RV (medido com o TRES) vs. Tempo. Desenhe uma função sinusoidal para os dados fornecidos. Estime o período orbital ( $P_{orb}$ ) e a amplitude da velocidade radial ( $K$ ) dos seus dados.

d) Se a estrela se movimentar numa órbita circular, calcule o valor mínimo do raio orbital ( $r_{orb}$ ) da estrela em unidades de  $R_{\odot}$  e u.a. .

e) A função de massa de um sistema binário é definida como:

$$f(M_1, M_2) = \frac{(M_2 \sin i_{orb})^3}{(M_1 + M_2)^2}$$

onde o termo 1 subscrito representa a estrela primária e 2 representa sua companheira. O parâmetro  $i_{orb}$  é a inclinação orbital do sistema binário. Esta função de massa pode também ser expressa em termos de parâmetros observáveis. Calcule a função de massa deste sistema em unidades de  $M_{\odot}$ .

C. Tendo em vista uma análise detalhada nas medidas do APOGEE, o espectro de TRES e as medidas de paralaxe do GAIA<sup>6</sup>, astrônomos obtiveram os seguintes parâmetros estelares, apresentados na tabela 3.

Temperatura Efetiva $T_{eff}$ (K)	Gravidade superficial $\log g$ ( $\text{cm/s}^2$ )	Paralaxe $\pi$ (mas)	Velocidade de rotação medida $v_{rot} \sin i$ (km/s)	Fluxo bolométrico $F$ ( $\text{W/m}^2$ )
$4\,890 \pm 130$	$2,2 \pm 0,1$	$0,272 \pm 0,049$	$14,1 \pm 0,6$	$(1,1 \pm 0,1) \times 10^{-12}$

As observações fotométricas indicam que o período da curva de luz é idêntico ao período orbital. Desta forma, podemos assumir que o período de rotação satisfaz a relação  $P_{rot} = P_{orb} \equiv P$  e a inclinação satisfaz a condição  $i_{orb} = i_{rot} \equiv i$ .

f) Calcule a luminosidade ( $L_1$ , em unidades de  $L_{\odot}$ ), raio ( $R_1$ , em unidades de  $R_{\odot}$ ) e o seno do ângulo de inclinação ( $\sin i$ ), assim como a massa ( $M_1$ , em unidades de  $M_{\odot}$ ). Inclua as incertezas em seus resultados. Dica:  $g = 10^{\log g}$ .

<sup>5</sup> Sigla para Tillinghast Reflector Echelle Spectrograph.

<sup>6</sup> Satélite europeu lançado em 2013 para realizar o mapeamento da Galáxia em altíssima precisão.

g) Escolha o tipo correto da estrela a partir das seguintes opções:

(1) Gigante Azul, (2) Amarela da Sequência Principal, (3) Gigante Vermelha, (4) Vermelha da Sequência Principal e (5) Anã Branca.

h) Baseado na função de massa  $f(M_1, M_2)$  do sistema binário, faça um gráfico relacionando  $M_1$  (no eixo vertical) com  $M_2$  (no eixo horizontal). Adote os termos  $\sin i$ ,  $\sin i + \Delta \sin i$  e  $\sin i - \Delta \sin i$ , obtidos em f), e desenhe no gráfico estas três variáveis.

i) No gráfico solicitado anteriormente, marque a região horizontal de intervalo  $[M_1 - \Delta M_1, M_1 + \Delta M_1]$  e duas linhas pontilhadas verticais, mostrando os limites máximos para as massas de anãs-brancas e estrelas de nêutrons. Com este gráfico, responda: qual é a massa da possível companheira invisível, e que tipo de objeto ela poderia ser?

Dica importante: a propagação de erro de para uma função  $f(x, y, z, \dots)$  pode ser determinada por:

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots$$

### 37) [C] (IOAA) Fotometria e espectroscopia da Nova Del 2013

V339 Del (Nova Delphini 2 013) é uma nova clássica descoberta por Koichi Itagaki com magnitude 6.8<sup>m</sup> em 14 de agosto de 2013 às 14:01 UT (MJD = 56 518,584). Astrônomos amadores e profissionais analisaram as observações fotométricas e espectroscópicas da nova. Menos de 10 horas após o alerta, a noite chegou ao Observatório Konkoly, da Academia Húngara de Ciências, situado na estação de montanha Pizskéstető. Astrônomos húngaros obtiveram o primeiro espectro da nova com o espectrógrafo échelle eShel instalado no telescópio de 1 metro do Observatório Astronômico Gothard, pertencente à Universidade Loránd Eötvös.

A Figura 1 mostra a curva de luz visível da nova baseada nos dados obtidos no website da AAVSO<sup>7</sup>. Os eixos horizontal e vertical mostram a Data Juliana Modificada (MJD = JD - 2 400 000,5) das observações, e as magnitudes no filtro Johnson V, respectivamente. Os círculos cinzas (cerca de 38 000 pontos) representam os valores medidos, enquanto a linha negra continua é o resultado de um ajuste suave com filtro Gaussiano (Largura a Meia Altura = 0,5 dia) que define uma curva de luz “média” a partir dos dados.

A taxa de declínio do brilho pode ser caracterizada pelos valores  $t_2$  e  $t_3$ , que mostram o intervalo de tempo, em dias, em que a nova diminui seu brilho em 2 e 3 magnitudes em comparação com o brilho máximo.

Algumas fórmulas empíricas relacionando a magnitude absoluta no filtro V no brilho máximo ( $M_0$ ) e os valores de  $t_2$  e  $t_3$  podem ser encontrados na literatura, por exemplo:

$$(a) M_{0,V} = -7,92 - 0,81 \arctan \frac{1,32 - \log t_2}{0,23} \quad (\text{Della Valle, M. \& Livio, M.: 1995, } ApJ \text{ } \mathbf{452}, 704)$$

$$(b) M_{0,V} = -11,32 + 2,55 \log t_2 \quad (\text{Downes, R.A. \& Durbeck, H.W.: 2000, } AJ \text{ } \mathbf{120}, 2007)$$

$$(c) M_{0,V} = -11,99 + 2,54 \log t_3 \quad (\text{Downes, R.A. \& Durbeck, H.W.: 2000, } AJ \text{ } \mathbf{120}, 2007)$$

O excesso de cor  $E(B - V)$  da Nova Del 2013 (Chochol, D. et al.: 2014, *Contrib. Astron. Obs. Skalnaté Pleso* **43**, 330) é:  $E(B - V) = 0,184 \pm 0,035$ .

A Figura 2 mostra o espectro da nova na região próxima à linha H $\alpha$  em seis noites consecutivas, antes e depois do instante de brilho máximo ( $t_0$ ). Os espectros foram deslocados verticalmente para clareza da figura. As Datas Julianas Modificadas (MJD) das observações estão listadas à direita de cada um dos espectros.

<sup>7</sup> Sigla para *American Association of Variable Star Observers*.

A linha  $H\alpha$  mostra o chamado perfil P Cygni, com asas muito alargadas, que são encontradas em novas e também em outros tipos espectrais. Esse perfil indica movimento radial de grandes quantidades de matéria sendo ejetada da estrela. O perfil P Cygni é composto por um pico de emissão intenso e largo, centrado no comprimento de onda de repouso  $\lambda_0$  da linha  $H\alpha$  ( $\lambda_0 = 6\,562,82 \text{ \AA}$ ), e uma componente em absorção deslocada para o azul e geralmente mais fraca. A velocidade de expansão radial da casca gasosa pode ser estimada a partir da medida do comprimento de onda do pico de absorção  $\lambda$ , utilizando a conhecida fórmula do efeito Doppler que relaciona o deslocamento  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ , a velocidade radial  $v_r$ , e a velocidade da luz  $c$ .

Considere que a linha  $H\alpha$  que apresenta o perfil Cygni é excitada na região mais externa da casca esférica gasosa em expansão. Considere também que o tamanho dessa casca no momento do primeiro espectro ainda era desprezível.

a) A partir da curva de luz média da Figura 1, estime a Data Juliana Modificada do pico de magnitude ( $MJD_0$ ) e o valor dessa magnitude. Considere o erro na magnitude como sendo de  $0,05^m$ .

b) Estime as Datas Julianas Modificadas das diminuições de 2 e 3 magnitudes, e calcule os valores de  $t_2$  e  $t_3$ .

c) Usando os valores de  $t_2$  e  $t_3$  encontrados no item (b), determine a magnitude absoluta de pico da nova utilizando os três métodos apresentados anteriormente. Calcule a média desses valores ( $M_0$ ) e seu desvio padrão. Considere esse desvio padrão como a incerteza em  $M_0$ .

*Dica: A fórmula do desvio padrão é:*

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

d) Usando o valor do excesso de cor  $E(B - V)$ , determine a extinção interestelar na direção da nova  $A_V$  e sua incerteza. Suponha  $R_V = 3,1$  com erro desprezível.

e) Estime a distância até a nova e sua incerteza. Dê seu resultado em kpc.

f) Meça os comprimentos de onda centrais de absorção nos perfis P Cygni da Figura 2 e calcule as velocidades radiais correspondentes. Não é necessário estimar o erro.

g) Faça um gráfico dessas velocidades radiais em função das Datas Julianas Modificadas das observações.

h) A partir do gráfico em (g), estime o raio físico do envelope no final do período observado. Dê sua resposta em unidades astronômicas (ua).

i) Usando a distância até a nova e o raio físico do envelope esférico 5 dias após a sua descoberta, estime o diâmetro angular aparente do envelope nesse momento.

Nova Del 2013 – Johnson V light curve

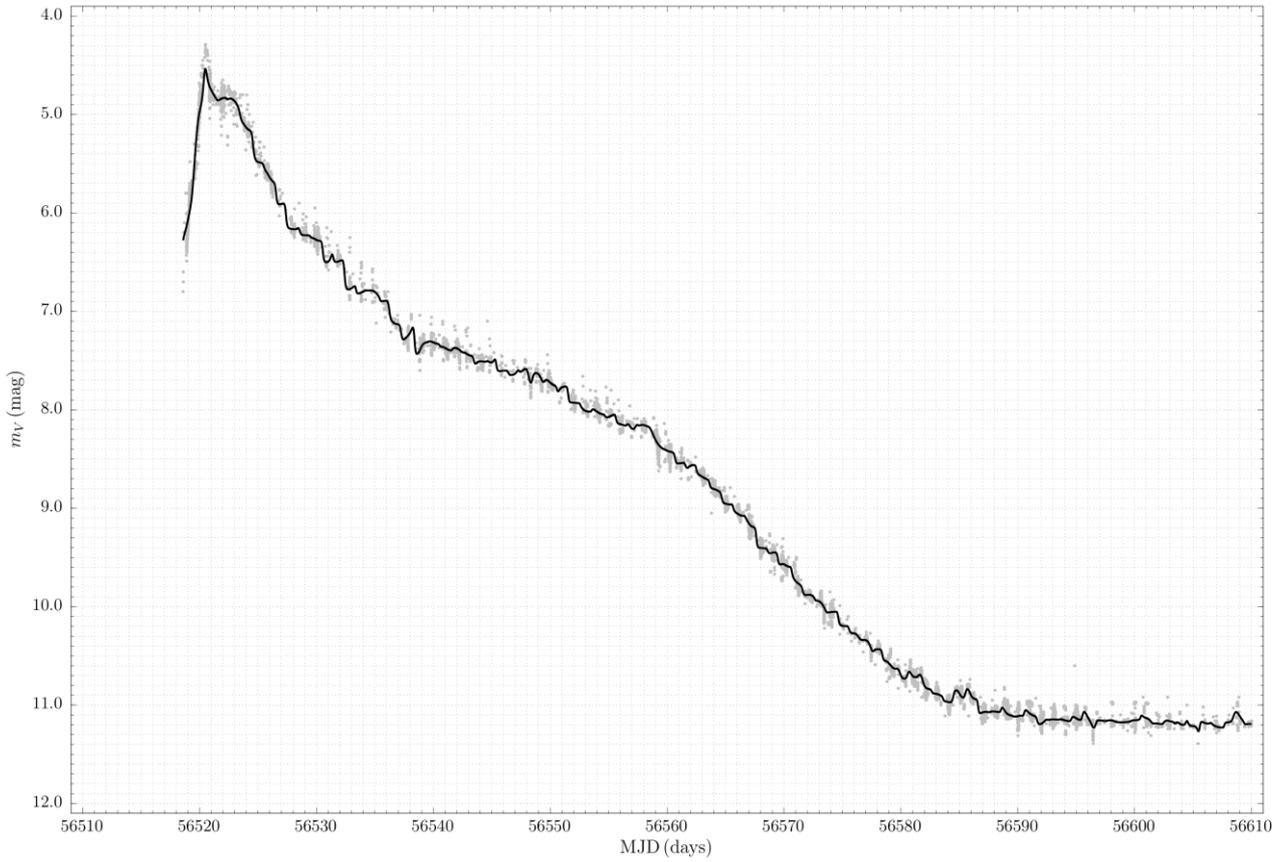


Figura 1: Curva de luz da Nova Del 2013 no filtro Johnson V

Nova Del 2013 – Spectra around H $\alpha$  line

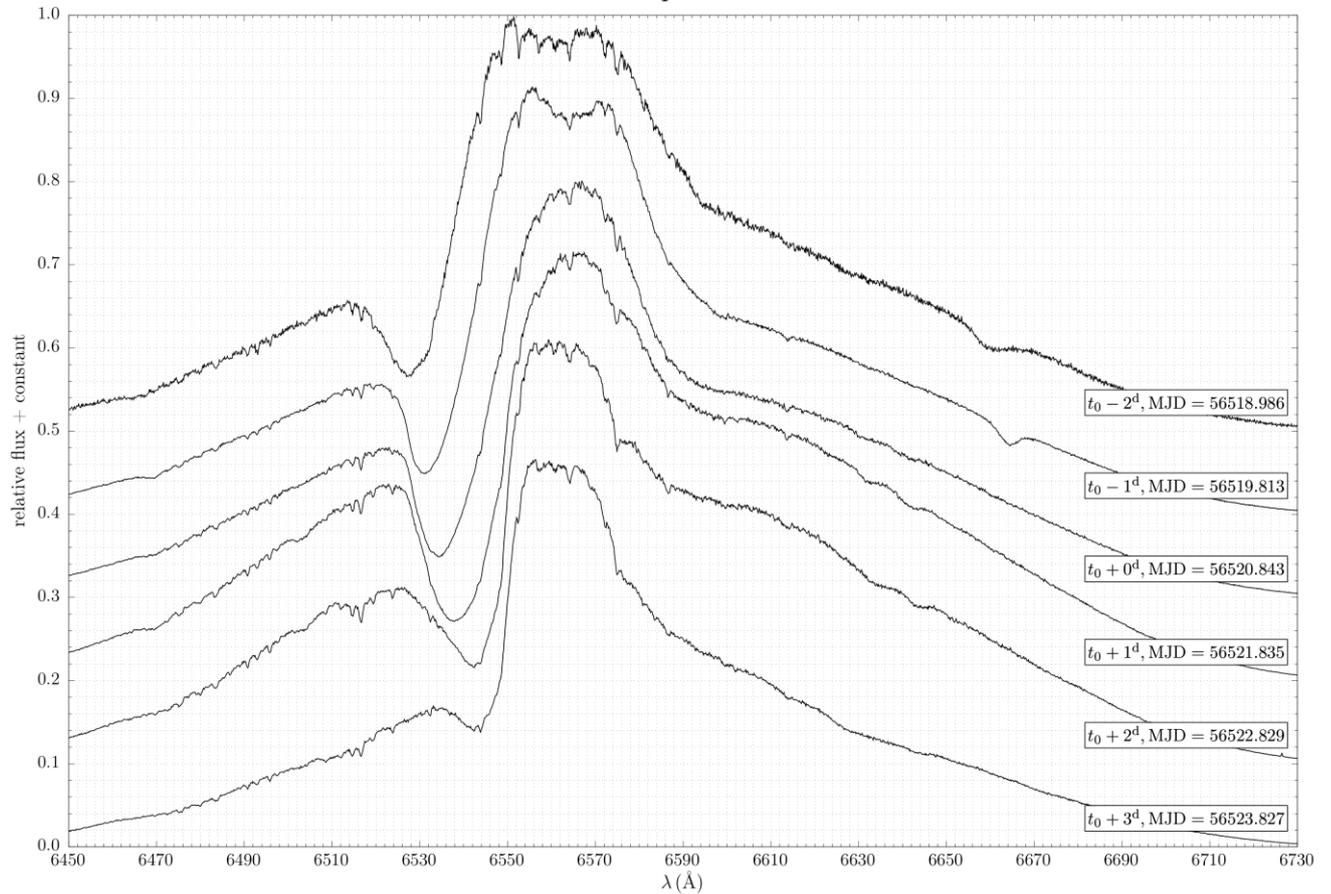


Figura 2: Nova Del 2013 – Espectros na região da linha H $\alpha$

## Soluções: Astronomia

1) a) Para que Polaris seja circumpolar sua culminação superior deve ter a altura angular  $h_{SUP} = 0$ , como pode ser visto na figura 1.

Para  $h_{SUP} = 0$ , temos que,  $90^\circ - \delta = \phi$ , a estrela será visível. Portanto, a latitude será:

$$\phi = 90^\circ - 89^\circ 15' 51'' \therefore \boxed{\phi = 0^\circ 44' 09'' S}$$

b) Considerando a atmosfera, levamos em conta que algumas estrelas abaixo do horizonte estarão visíveis. Assim, aplicamos o fator de correção sobre a declinação da estrela. Portanto:

$$\phi = 90^\circ - \delta + R = 90^\circ - 89^\circ 15' 51'' + 35,4' \\ \therefore \boxed{\phi = 1^\circ 19' 33'' S}$$

c) de maneira análoga, para determinar em quais latitudes no hemisfério Norte Polaris será circumpolar, devemos considerar que a altura da culminação inferior será  $h_{INF} = 0$ . Portanto:

$$\phi = 90^\circ - \delta \therefore \boxed{\phi = 0^\circ 44' 09'' N}$$

2) a) Da expressão do Tempo Sideral Local, temos que:

$$TSL = \alpha_\odot + H \Rightarrow \alpha_\odot = 18 - 12 \therefore \boxed{\alpha_\odot = 06^h}$$

b) Quando o sol atinge esta ascensão reta, significa que ele se encontra no Solstício de junho. Portanto, a data será **21 ou 22 de junho**.

c) Para esta data, a constelação onde o Sol se localiza é Touro (*Taurus, Tau*)

d) A culminação máxima ( $h_{MAX}$ ), pode ser obtida observando a projeção lateral da esfera celeste.

Da figura 2, temos que  $\phi + (h_\odot - \delta_\odot) = 90^\circ$ . Nesta data, ao Sol se encontra na declinação  $\delta_\odot = 23^\circ 30'$ . Portanto, a altura será  $\boxed{h = 62^\circ 02'}$ .

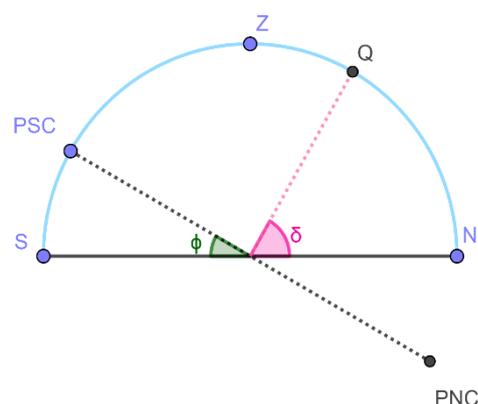


Figura 3

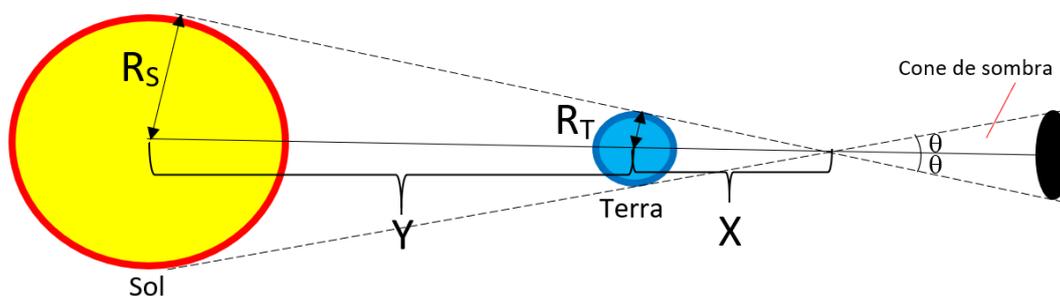
3) Por definição, quando a estrela cruza o Meridiano Local,  $H_L = 0$ . Assim, o ângulo horário em Tessalônica ( $H_T$ ) será:

$$H_T = 0 + (\lambda_1 - \lambda_2) \therefore \boxed{H_T = 02 \text{ h } 08 \text{ min}}$$

Através da Lei dos Cossenos para triângulos esféricos

$$\cos z_T = \cos(90 - \varphi) \cdot \cos(90 - \delta) + \sin(90 - \varphi) \cdot \sin(90 - \delta) \cdot \cos H_T \therefore \boxed{z_T = 24^\circ 33'}$$

4) a) Para termos um trânsito total, todo o disco da Terra deve passar em frente ao Sol, esquematicamente, temos:



Da simetria do sistema, temos:

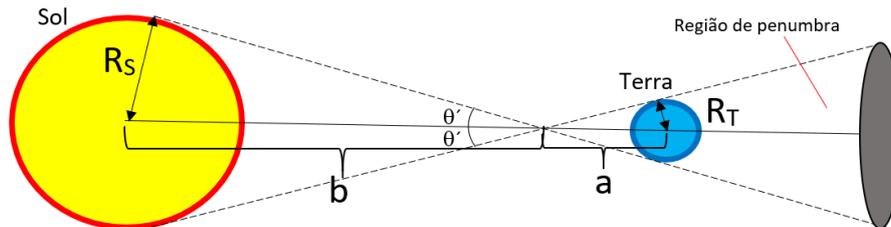
$$\frac{R_T}{X} = \frac{R_S}{X+Y} \Rightarrow X = \frac{Y \cdot R_T}{R_S - R_T} = \frac{1,496 \cdot 10^8 \cdot 6371}{696340 - 6371} \Rightarrow X = 1,381 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$\text{sen} \theta = \frac{R_T}{X} = \frac{6371}{1,381 \cdot 10^6} \Rightarrow \theta = 0,264^\circ$$

Logo, a largura angular da região de trânsito total da Terra é:

$$\theta_T = 2 \cdot \theta = 2 \cdot 0,264^\circ \Rightarrow \boxed{\theta_T = 0,528^\circ}$$

b) Para termos um trânsito parcial, apenas uma parte do disco da Terra deve passar em frente ao Sol, esquematicamente, temos:



Da simetria do sistema, temos:

$$\frac{R_T}{a} = \frac{R_S}{b} \Rightarrow b = \frac{a \cdot R_S}{R_T} \Rightarrow b = \frac{(1,496 \cdot 10^8 - b) \cdot 696340}{6371} \Rightarrow b = 1,482 \cdot 10^8 \text{ km}$$

$$\text{sen} \theta' = \frac{R_S}{b} = \frac{696340}{1,482 \cdot 10^8} \Rightarrow \theta' = 0,269^\circ$$

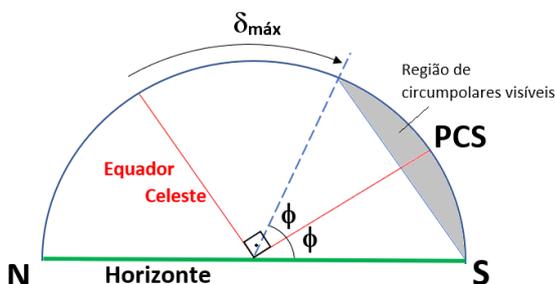
Logo, a largura angular onde observadores extra-solares podem detectar pelo menos um trânsito parcial é:

$$\theta_p = 2 \cdot \theta' = 2 \cdot 0,269^\circ \Rightarrow \boxed{\theta_p = 0,538^\circ}$$

5) a) Entre os dias 2 de março e 15 de junho existem 105 dias. Sabendo que após 365,25 dias a estrela estará culminando superiormente no mesmo horário, temos que após 105 dias o ângulo H entre a estrela e o meridiano local (ângulo horário) será:

$$H = 105 \text{ dias} \cdot \frac{360^\circ}{365,25 \text{ dias}} \Rightarrow H = 103,56^\circ \Rightarrow \boxed{H = 6h 53min 58s}$$

b) Do esquema, temos:



$$|\phi| \geq 90^\circ - |\delta| \Rightarrow |\phi| \geq 90^\circ - 62^\circ 41' \Rightarrow \boxed{|\phi| \geq 27^\circ 19' S}$$

c) No **Equador**, pois  $\phi = 0^\circ$  o que implica  $\delta = 90^\circ$ .

d) A latitude do círculo polar antártico é cerca de  $66^\circ 30' N$ , o que implica que a declinação do Sol quando se torna circumpolar deverá ser:

$$\delta = 90^\circ - \phi \Rightarrow \delta = 90^\circ - 66^\circ 30' \Rightarrow \delta = +23^\circ 30'$$

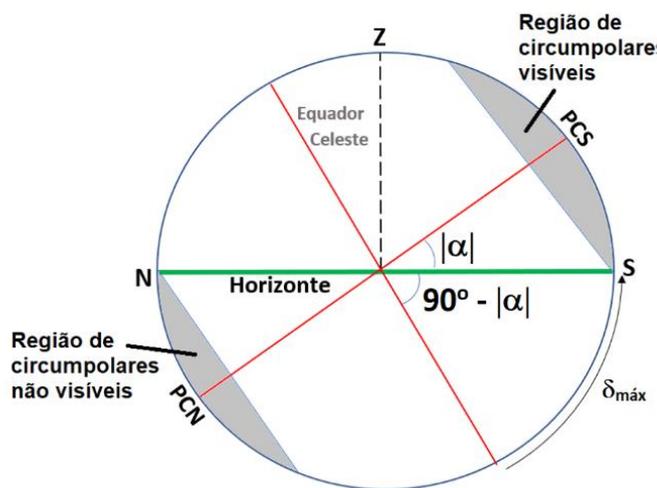
O que corresponde ao **solstício de dezembro**.

6) Como é dito que neste dia o Sol verdadeiro está 14 minutos atrasado em relação ao Sol médio, ele cruza o meridiano 45° (centro do fuso horário) às 12h 14min. No entanto, o relógio está localizado na longitude  $\lambda = -43^{\circ} 46' 15''$  portanto, existe uma diferença do centro de fuso igual a  $|\Delta\lambda| = 45^{\circ} - 43,7708^{\circ} = 1,2292^{\circ}$ . Essa diferença, em minutos, é:

$$\Delta\lambda = 1,2292^{\circ} \cdot \frac{60\text{min}}{15^{\circ}} \Rightarrow \Delta\lambda = 5\text{min}$$

Logo, o Sol cruza o meridiano local cerca de 5 minutos antes de cruzar a longitude 45°, ou seja, às 12h 14min – 5min = 12h 09 min. Como ainda há a vigência do horário de verão, acrescentamos 1h. Portanto, será **13h09min** quando o Sol cruzar o meridiano local no dia 6 de fevereiro de 2019.

7) a) Representando a região de circumpolaridade visíveis para um observador no hemisfério Sul, temos:



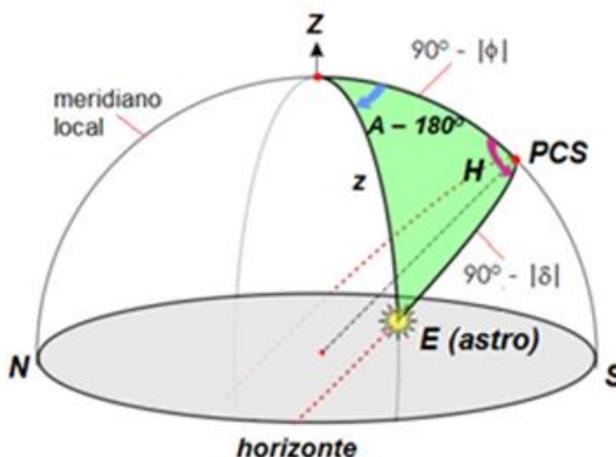
Analisando a representação ao lado, temos que para a estrela pertencer a região de circumpolaridade visível, o módulo da sua declinação ser maior do que o módulo da declinação máxima indicada, portanto:

$$|\delta| > |\delta_{máx}| \Rightarrow |\delta| > 90^{\circ} - |\alpha|$$

Como  $\delta < 0$ , vem:

$$\delta < 90^{\circ} - |\alpha|$$

b) Representando um astro  $E$  qualquer de declinação  $\delta$  e distância zenital  $z$  visível para um observador no hemisfério Sul com latitude  $\phi < 0$ , temos:



A partir da Lei dos cossenos para os triângulos esféricos, pode-se estabelecer as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(90^{\circ} - |\phi|) \cdot \cos(90^{\circ} - |\delta|) + \text{sen}(90^{\circ} - |\phi|) \cdot \text{sen}(90^{\circ} - |\delta|) \cdot \cos H \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos z &= \text{sen}|\phi| \cdot \text{sen}|\delta| + \cos|\phi| \cdot \cos|\delta| \cdot \cos H \Rightarrow \cos H = \cos z \cdot \text{sec}|\phi| \cdot \text{sec}|\delta| - \text{tg}|\phi| \cdot \text{tg}|\delta| \end{aligned}$$

Na situação do nascer e do ocaso de um astro, sua distância zenital tem valor de  $z = 90^{\circ}$ , portanto:

$$\cos H = \cos 90^{\circ} \cdot \text{sec}|\phi| \cdot \text{sec}|\delta| - \text{tg}|\phi| \cdot \text{tg}|\delta| \Rightarrow \boxed{\cos H = -\text{tg}\phi \cdot \text{tg}\delta}$$

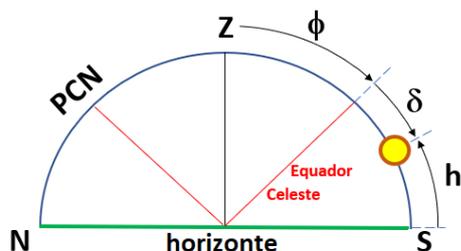
c) Da relação obtida no item b, e lembrando que  $1h = 15^\circ$  temos que o ângulo horário de ocaso da estrela é:

$$\cos H = -\operatorname{tg}\phi.\operatorname{tg}\delta = -\operatorname{tg}(-30^\circ).\operatorname{tg}(-45^\circ) \Rightarrow H = 125,26^\circ = 8,35 h$$

Portanto, o tempo que a estrela fica acima do horizonte (tempo do nascer e ocaso) para o observador na situação imposta é:

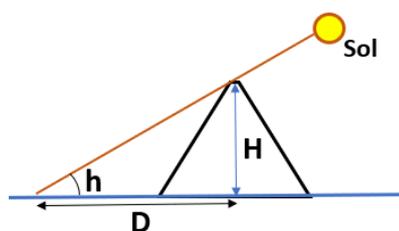
$$\Delta t = 2.H \Rightarrow \Delta t = 2.8,35 \Rightarrow \boxed{\Delta t = 16,7 h}$$

8) A altura  $h$  do Sol no instante da culminação superior é:



$$\begin{aligned} \phi + |\delta| + h &= 90^\circ \Rightarrow h = 90^\circ - \phi - |\delta| \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= 90^\circ - 19,32^\circ - 23,43^\circ \Rightarrow h = 47,25^\circ \end{aligned}$$

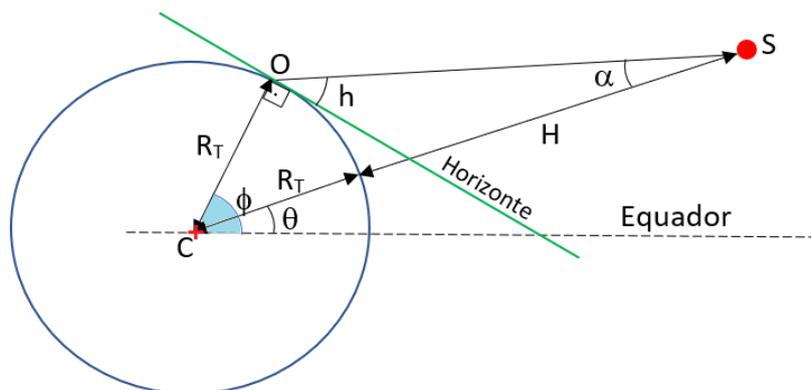
Portanto, a altura  $H$  do vulcão pode ser determinada por:



$$\begin{cases} \operatorname{tg} h = \frac{H}{D} \Rightarrow H = \operatorname{tg} h \cdot D \\ D = v \cdot t \end{cases} \Rightarrow H = \operatorname{tg} 47,25^\circ \cdot \frac{75}{3,6} \cdot 3,160 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H = 4192m}$$

9) Esquemáticamente, temos:



Do triângulo  $COS$ , temos que o ângulo  $\alpha$  é:

$$\begin{aligned} \phi - \theta + 90^\circ + h + \alpha &= 180^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - \phi + \theta - h = 90^\circ - 51,49^\circ + 6,69^\circ - h \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= 45,2^\circ - h \end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos senos no triângulo  $COS$ , temos:

$$\frac{R_T}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{R_T + H}{\operatorname{sen}(90^\circ + h)} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(90^\circ + h)}{\operatorname{sen}(45,2^\circ - h)} = \frac{R_T + H}{R_T} \Rightarrow \frac{\cos h}{\operatorname{sen}45,2^\circ \cdot \cosh - \cos45,2^\circ \operatorname{sen}h} = \frac{6371 + 35786}{6371} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos h}{0,709 \cdot \cosh - 0,704 \cdot \operatorname{sen}h} = 6,671 \Rightarrow \cosh = 4,730 \cdot \cosh - 4,696 \operatorname{sen}h \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}h}{\cosh} = \frac{3,730}{4,696} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} h = 0,794 \Rightarrow \boxed{h = 38,46^\circ}$$

10) a) Uma vez que o relógio de Sol indica o tempo com base na projeção da sombra de uma haste (gnômon), o tempo indicado por ele é o **tempo solar verdadeiro**.

b) Analisando o mostrador do relógio, temos que as horas crescem da esquerda para a direita. Portanto, o Sol nasce à esquerda do relógio, logo ele está de frente para o **Ponto Cardeal Sul**.

c) A linha na parte **superior** (azul) corresponde aos pontos onde a sombra do mostrador tem um menor comprimento, ou seja, descreve o **solstício de inverno** para o Hemisfério Norte. Já a linha na parte **inferior** (vermelha) corresponde aos pontos onde a sombra do mostrador tem maior comprimento (ocorre quando o Sol está mais alto no céu), e, portanto, ela descreve o **solstício de verão** para o Hemisfério Norte.

d) A linha horizontal (verde) é percorrida nos dois dias em que a noite tem exatamente o mesmo período do dia claro. Isso acontece nos **equinócios da primavera e do outono**.

e) Como a Equação do Tempo é nula em 1º de setembro, a única correção a ser feita na hora indicada pelo relógio de Sol é a correção de longitude ( $\Delta t$ ). O relógio se encontra a oeste do centro do fuso ( $15^\circ$ ). Portanto a passagem meridiana do Sol acontecerá depois do meio-dia civil.

$$\Delta t = 15^\circ - 13^\circ 43' 54'' = 1^\circ 16' 6'' \Rightarrow \Delta t = 5 \text{ min } 4,4 \text{ s}$$

Portanto, a passagem meridiana do Sol em 1º de setembro acontece às 12h05min4,4 s  $\approx$  **12h05min**.

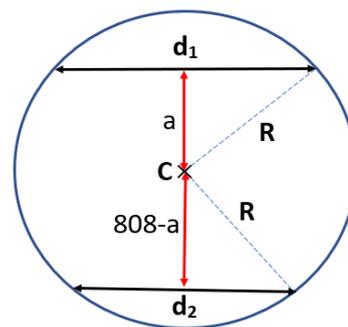
11) Sendo  $d_1$ , a distância percorrida pelo objeto em frente a estrela, medida pelo observado A; e  $d_2$ , a distância percorrida pelo mesmo objeto, medida pelo observador B que está separado 808 km de A, temos:

$$d_1 = v \cdot \Delta t_A = 15 \cdot 50 \Rightarrow d_1 = 750 \text{ km}$$

$$d_2 = v \cdot \Delta t_B = 15 \cdot 20 \Rightarrow d_2 = 300 \text{ km}$$

Sendo R o raio da estrela, da figura, temos:

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad R^2 = (808 - a)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

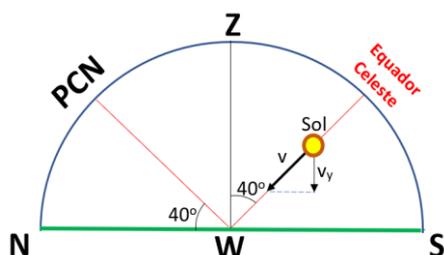


Portanto:

$$a^2 + 375^2 = (808 - a)^2 + 150^2 \Rightarrow a = 330,90 \text{ km}$$

$$R^2 = 330,90^2 + 375^2 \Rightarrow \boxed{R = 500 \text{ km}}$$

12) Considerando que o Sol está passando pelo equador celeste ( $\delta_\odot = 0$ ) em um local de latitude  $\phi = 40^\circ \text{ N}$  e sabendo que o dia solar médio corresponde a 24 h, temos que a velocidade angular  $\omega_y$ , de aproximação do Sol ao horizonte é:

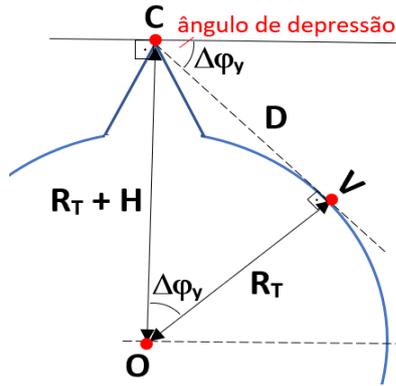


$$\frac{v_y}{v} = \frac{\omega_y \cdot R}{\omega \cdot R} \Rightarrow \frac{v \cdot \cos 40^\circ}{v} = \frac{\omega_y}{\frac{2\pi}{24 \text{ h}}} \Rightarrow \omega_y = \frac{2\pi}{24} \cdot \cos 40^\circ = 0,2 \frac{\text{rad}}{\text{h}}$$

Logo, o ângulo  $\Delta\phi_y$  de depressão da colina com o horizonte é:

$$\Delta\phi_y = \omega_y \cdot \Delta t = 0,2 \cdot \frac{4,1}{60} = 0,0136 \text{ rad} \Rightarrow \Delta\phi_y = 0,783^\circ$$

Portanto, temos que a altura  $H$  da colina e a distância  $D$  entre o topo da colina (C) e a vila (V) é:



$$\cos \Delta \varphi_y = \frac{R_T}{R_T + H} \Rightarrow \cos 0,783^\circ = \frac{6371}{6371 + H} \Rightarrow H = 0,595 \text{ km} \Rightarrow \boxed{H \approx 600 \text{ m}}$$

$$\text{sen} \Delta \varphi_y = \frac{D}{R_T + H} \Rightarrow \text{sen} 0,783^\circ = \frac{D}{6371 + 0,595} \Rightarrow \boxed{D = 87,1 \text{ km}}$$

13) No instante em que a Grande Nuvem de Magalhães culmina em Phuket (ângulo horário  $H=0$ ), podemos afirmar que o Tempo Sideral em Greenwich ( $T_{SG}$ ) é:

$$\begin{cases} T_{SL} = H + \alpha \\ T_{SL} = T_{SG} + \lambda \\ \alpha = 5h24\text{min} \\ \lambda = 98^\circ 24' = 6h33\text{min}36s \end{cases} \Rightarrow T_{SG} = \alpha - \lambda \Rightarrow T_{SG} = 5h24\text{min} - 6h33\text{min}36s = 22h50\text{min}24s$$

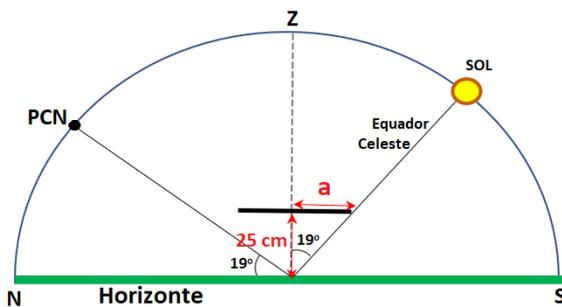
Para que a culminação ocorra às 21 h em Phuket, ou, o equivalente, às 14 h em Greenwich ( $21h - 7h = 14h$ ), são necessários a partir do dia 1º de janeiro do ano de observação um total de dias ( $n$ ) igual a:

$T_{SG} = T_{SG}$  em 1º de janeiro + ângulo que o ponto vernal se movimentou a partir de 1º janeiro + horário de observação

$$22h50\text{min}24s = 6h43\text{min} + \left( \frac{n \cdot 24h}{365,25 \text{ dias}} \right) + 14h \Rightarrow n = 32,31 \text{ dias}$$

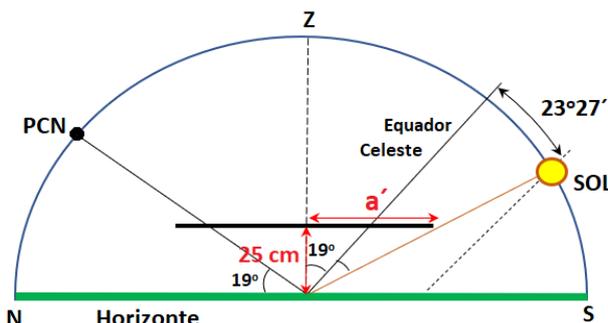
Portanto, o dia em que a Grande nuvem de Magalhães culmina em Phuket às 21h é **2 de fevereiro**.

14) a) Esquemáticamente, para o Sol ao meio-dia em 21 de março (equinócio) na cidade de Puebla ( $\phi = 19^\circ N$ ), temos:



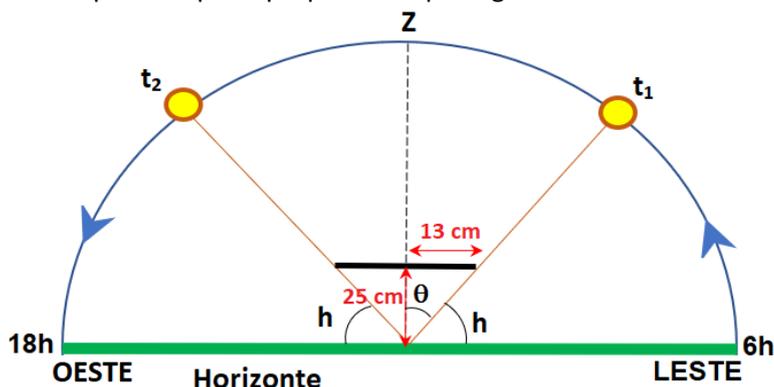
$$\text{tg} 19^\circ = \frac{a}{25} \Rightarrow \boxed{a = 8,61 \text{ cm}}$$

b) A situação mais crítica acontecerá quando o Sol possuir a menor altura, ao meio-dia, em relação ao horizonte. Esse evento acontecerá próximo ao dia 21 de dezembro (solstício de inverno para o hemisfério norte) em que a declinação do Sol é  $-23^\circ 27'$ , esquemáticamente, temos:



$$\text{tg}(19^\circ + 23^\circ 27') = \frac{a'}{25} \Rightarrow \boxed{a' = 22,87 \text{ cm}}$$

c) Sabendo que Citlali está no Equador ( $\phi = 0^\circ$ ) em 21 de setembro (equinócio), temos que a altura  $h$  do Sol em que seu chapéu cumpre o propósito de proteger todo o seu rosto é:



$$\begin{aligned} h + \theta &= 90^\circ \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{13}{25} \Rightarrow h = 90^\circ - 27,47^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow h = 62,52^\circ \end{aligned}$$

Sabendo que no Equador, em 21 de setembro, o Sol nasce próximo às 6h e se põe às 18h, os instantes  $t_1$  e  $t_2$  em que o Sol terá altura  $h$  são respectivamente:

$$t_1 = 6h + 62,52^\circ \cdot \frac{12h}{180^\circ} \Rightarrow t_1 = 10h10\text{min}4,8s$$

$$t_2 = 18h - 62,52^\circ \cdot \frac{12h}{180^\circ} \Rightarrow t_2 = 13h49\text{min}55,2s$$

Portanto, o chapéu cumprirá o seu papel das **10h10min às 13h50min**.

d) O intervalo de tempo necessário para que Citlali sofra queimaduras será o tempo  $t$  em que a área do gráfico corresponda ao valor  $200 \text{ J/m}^2$  (lembrando que o chapéu absorve metade da radiação). Analisando o gráfico, temos:

- A área total do gráfico é:

$$A_{\text{total}} = \frac{(6+2) \cdot 0,016}{2} \cdot 3600 = 230,4 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre 12h e 14h é:

$$A_1 = 2 \cdot 0,016 \cdot 3600 = 115,2 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre os instantes 14h e  $t$ :

$$A_2 = 200 - 115,2 = 84,8 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre os instantes  $t$  e 18h:

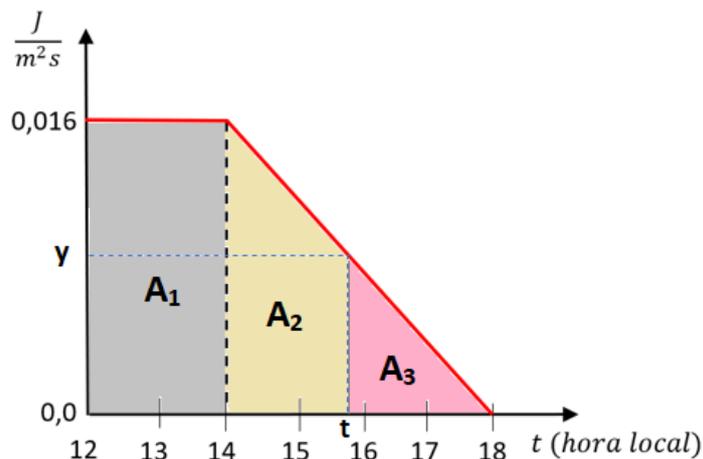
$$A_3 = A_{\text{total}} - (A_1 + A_2) = 230,4 - (115,2 + 84,8) = 30,4 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- Da proporção do gráfico, temos que a relação entre  $t$  e  $y$  é tal que:

$$\frac{18-t}{18-14} = \frac{y-0}{0,016-0} \Rightarrow y = 0,004 \cdot (18-t) \quad [1]$$

- Entre os instantes  $t$  e 18h, é válido que:

$$A_3 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \Rightarrow 30,4 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \cdot 3600 \quad [2]$$

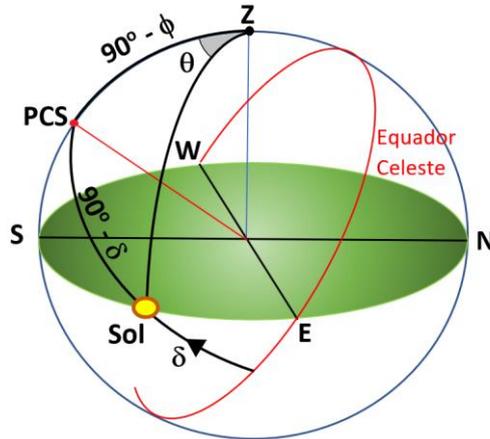


- Das equações [1] e [2], vem:

$$\begin{cases} y = 0,004 \cdot (18 - t) \\ 30,4 = \frac{(18 - t) \cdot y}{2} \cdot 3600 \end{cases} \Rightarrow 30,4 = \frac{y}{0,004} \cdot \frac{y}{2} \cdot 3600 \Rightarrow y = 0,00822 \frac{J}{m^2 \cdot s} \text{ e } t = 15,94h$$

Portanto, a partir das 16h Citlali sofrerá queimaduras por excesso de exposição solar.

15) Analisando a tabela, temos que a declinação do Sol no dia 15 de outubro é  $\delta = -8^\circ 37' 23''$ . Analisando o triângulo de posição (Polo Celeste Sul – Sol – Zênite), na situação em que Sol está nascendo (distância zenital =  $90^\circ$ ), temos que o valor de  $\theta$  é:



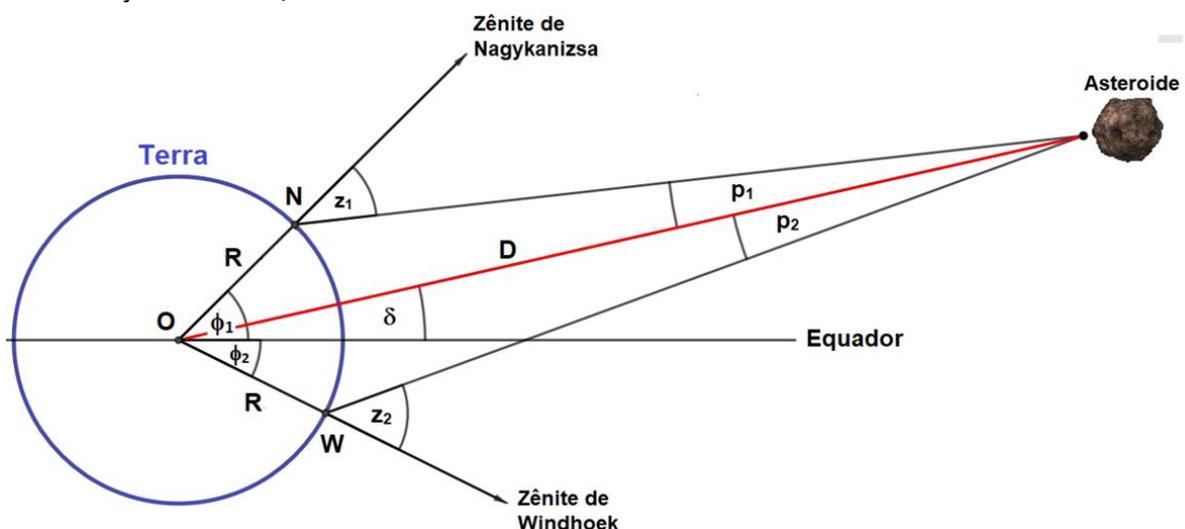
$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - |\delta|) &= \cos(90^\circ - |\phi|) \cdot \cos(90^\circ) + \text{sen}(90^\circ - |\phi|) \cdot \text{sen}(90^\circ) \cdot \cos|\theta| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{sen}|\delta| = \text{sen}|\phi| \cdot 0 + \cos|\phi| \cdot 1 \cdot \cos|\theta| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{sen}(8^\circ 37' 23'') = \cos(27^\circ 24') \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0,1688 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \theta = 80^\circ 16' 38,5'' \end{aligned}$$

Como o ângulo formado pelo Sol e o ponto cardinal Sul é igual a  $\theta$ , da situação representada no enunciado, temos que o comprimento L do píer é aproximadamente:

$$\text{tg}\theta = \frac{L}{100} \Rightarrow L = 100 \cdot \text{tg}(80^\circ 16' 38,5'') \Rightarrow \boxed{L \approx 585 \text{ m}}$$

OBS (inútil!): O *Southend Pier*, na Inglaterra, é o mais longo píer para lazer no mundo com 2 158 m.

16) a) Das informações do texto, temos:

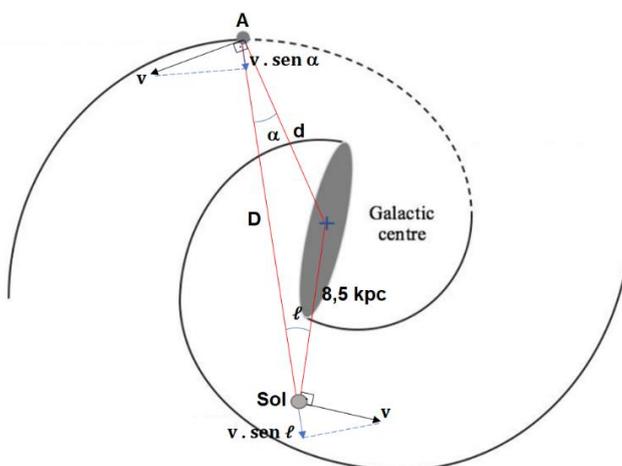




Portanto, as coordenadas geográficas dos pontos A, B e C são:

<b>A</b>	90° N	indefinido
<b>B</b>	32,7075° N	0 h
<b>C</b>	32,7075° N	4,5418 h

**18) a)** Lembrando que fora do bojo galáctico a velocidade de rotação ( $v$ ) dos astros é praticamente a mesma ao redor do centro galáctico, esquematicamente, temos:



Sabendo que o ponto A e o Sol necessariamente se aproximam, a velocidade radial de aproximação  $v_r$  neste caso é expressa por:

$$v_r = v \cdot \text{sen} \alpha - v \cdot \text{sen} l$$

Portanto, o valor de  $\text{sen} \alpha$  é:

$$20,9 = 220 \cdot \text{sen} \alpha - 220 \cdot \text{sen}(13,25^\circ) \Rightarrow \text{sen} \alpha = 0,324 \quad [\alpha = 18,90^\circ]$$

Aplicando a Lei dos senos, temos que a distância  $d$  entre o ponto A e o centro da galáxia é:

$$\frac{d}{\text{sen} l} = \frac{8,5}{\text{sen} \alpha} \Rightarrow \frac{d}{\text{sen}(13,25^\circ)} = \frac{8,5}{0,324} \Rightarrow \boxed{d = 6,01 \text{ kpc}}$$

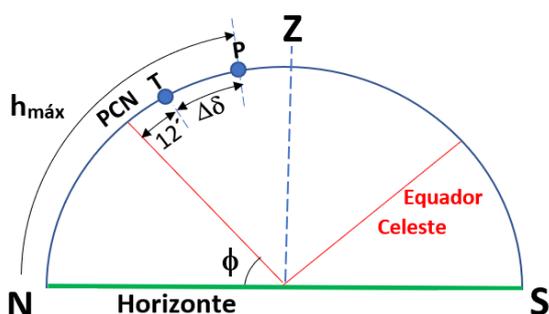
b) Aplicando a Lei dos cossenos, temos que a distância  $D$  é:

$$\begin{aligned} D^2 &= d^2 + 8,5^2 - 2 \cdot d \cdot 8,5 \cdot \cos(180^\circ - l - \alpha) \Rightarrow \\ \Rightarrow D^2 &= 6,01^2 + 8,5^2 - 2 \cdot 6,01 \cdot 8,5 \cdot \cos(180^\circ - 13,25^\circ - 18,90^\circ) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{D = 13,93 \text{ kpc}} \end{aligned}$$

**19)** Desconsiderando os movimentos próprios das estrelas, podemos considerar que a distância angular entre a Estrela Polar e Thuban permaneceu fixa ao longo do tempo. Tomando como referência os dados do ano 2000, temos que a distância, em declinação, das duas estrelas é:

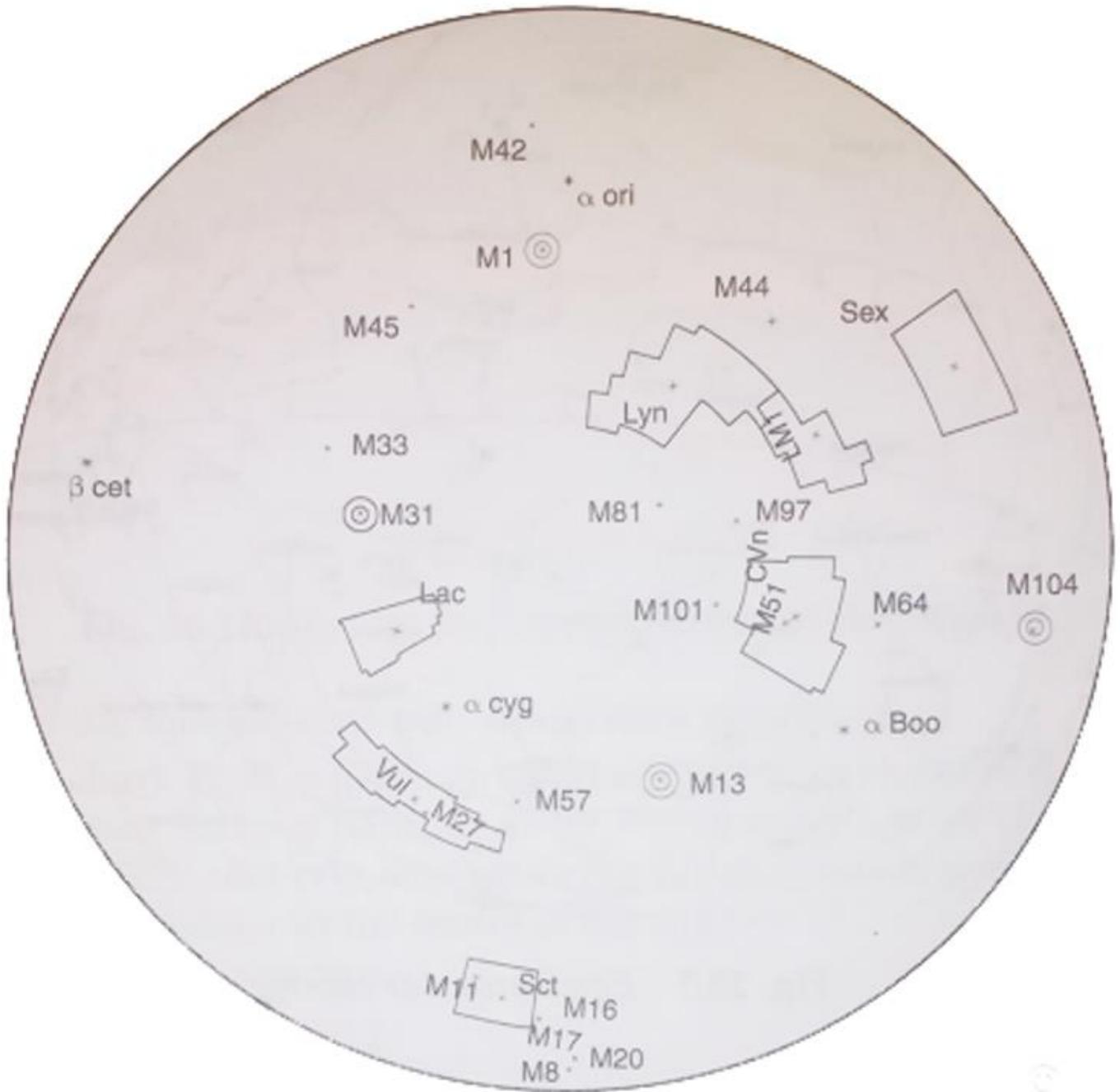
$$\Delta \delta = \delta_{\text{Polar}2000} - \delta_{\text{Thuban}2000} \Rightarrow \Delta \delta = 89^\circ 16' - 64^\circ 22' \Rightarrow \Delta \delta = 24^\circ 54'$$

Para o ano 2800 a.C., temos que a estrela Thuban (T) está a 12' do Polo Celeste Norte. Logo, representando esquematicamente o instante em que a Estrela Polar (P) atinge a altura máxima ( $h_{\text{máx}}$ ), em Roma ( $\phi = 41^\circ 53' \text{ N}$ ), vem:



$$\begin{aligned} h_{\text{máx}} &= \phi + 12' + \Delta \delta \Rightarrow h_{\text{máx}} = 41^\circ 53' + 12' + 24^\circ 54' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{h_{\text{máx}} = 66^\circ 59' \approx 67^\circ} \end{aligned}$$

20) Para os itens a e b, veja o mapa a seguir:



21) a) Analisando a *Figura 1*, temos que a altura  $h$  do Sol é:

$$\operatorname{tg} h = \frac{23}{22} \Rightarrow h = 46,27^\circ$$

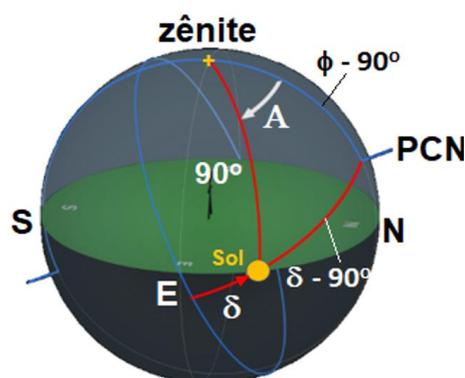
Considerando que a declinação do Sol no dia 21 de dezembro é  $\delta = -23,45^\circ$ , a latitude  $\phi$  de Chichén Itzá é:

$$|\phi| + |\delta| + h = 90^\circ \Rightarrow |\phi| = 90^\circ - 23,45^\circ - 46,27^\circ \Rightarrow \boxed{|\phi| = 20,73^\circ N}$$

b) Sabendo que o azimute da escada oeste é  $A_{EW} = 290^\circ$ , a *Figura 2*, temos:

$$A_{EW} - 270^\circ = \theta \Rightarrow \theta = 290^\circ - 270^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = 20^\circ}$$

c) Se o Sol faz passagem zenital em *Tinum* no dia 23 de maio, sua declinação, nesta data, é igual a latitude local, ou seja,  $\delta = \phi = 20,73^\circ$ . Para o nascer do Sol, o azimute *A* será dado por:



$$\begin{aligned} \cos(\delta - 90^\circ) &= \cos(\phi - 90^\circ) \cdot \cos 90^\circ + \sin(\phi - 90^\circ) \cdot \sin 90^\circ \cdot \cos A \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sin \delta = \cos \phi \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi} \Rightarrow \cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos A = \operatorname{tg} 20,73^\circ \Rightarrow \boxed{A = 67,76^\circ} \end{aligned}$$

Já para o pôr do Sol, com azimute *A'*, temos:

$$\cos(360^\circ - A') = \operatorname{tg} 20,73^\circ \Rightarrow \boxed{A' = 292,24^\circ}$$

d) A distância máxima e mínima entre o planeta Terra e Vênus é:

$$d_{\text{máx}} = 1 \text{ ua} + 0,72 \text{ ua} = 1,72 \text{ ua} \Rightarrow d_{\text{máx}} = 2,58 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$d_{\text{mín}} = 1 \text{ ua} - 0,72 \text{ ua} = 0,28 \text{ ua} \Rightarrow d_{\text{mín}} = 4,20 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Considerando o diâmetro de Vênus  $2 \cdot r = 1,21 \cdot 10^7 \text{ m}$ , temos:

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{máx}} = \frac{1,21 \cdot 10^7 \text{ m}}{4,20 \cdot 10^{10} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{\text{máx}} = 1,6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\theta_{\text{máx}} = 59,42''}$$

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{mín}} = \frac{1,21 \cdot 10^7 \text{ m}}{2,58 \cdot 10^{11} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{\text{mín}} = 2,7 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{\theta_{\text{mín}} = 9,67''}$$

e) Na culminação superior o ângulo horário tem valor zero ( $H=0$ ). Portanto, a ascensão reta do aglomerado é:

$$T_{SL} = H + \alpha \Rightarrow \alpha = 3h47 \text{ min}$$

Já o ângulo horário *H'* do aglomerado, neste instante, em *Greenwich*, é:

$$\begin{aligned} T_{SL} &= T_{SG} + \lambda \\ T_{SG} &= H' + \alpha && \Rightarrow T_{SL} = H' + \alpha + \lambda \Rightarrow 3h47 \text{ min} = H' + 3h47 \text{ min} - 5h54 \text{ min} 42s \Rightarrow \\ \lambda &= -88^\circ 34' = -5h54 \text{ min} 42s && \Rightarrow H' = 5h54 \text{ min} 42s \end{aligned}$$

Das relações apresentadas no enunciado, temos que 13 *winales* e 18 *kines* equivalem a 278 dias. Fixando o horário de observação sabemos que por dia o ângulo horário aumenta cerca de 4 min ( $1^\circ$ ) para oeste ( $360^\circ/365$  dias). Logo, após 278 dias a variação do ângulo horário ( $\Delta H$ ) será:

$$\Delta H = \frac{360^\circ}{365 \text{ dias}} \cdot 278 \text{ dias} \cdot \frac{1h}{15^\circ} \Rightarrow \Delta H = 18h16 \text{ min} 46s$$

Portanto, o novo ângulo horário (*H''*) das Plêiades em *Greenwich* será:

$$H'' = H' + \Delta H = 5h54 \text{ min} 42s + 18h16 \text{ min} 46s \Rightarrow \boxed{H'' = 11 \text{ min} 28s}$$

f) A declinação das Plêiades pode ser calculada por:

$$\delta - \phi + h = 90^\circ \Rightarrow \delta - 20^\circ 43,8' + 83^\circ 36' = 90^\circ \Rightarrow \delta = 27^\circ 7' 36''$$

Para um astro ser circumpolar visível é necessário que  $\delta + \phi > 90^\circ$ . Como  $\delta + \phi = 47^\circ 51' 24''$ , temos que as Plêiades **não** são circumpolares visíveis em *Tinum*.

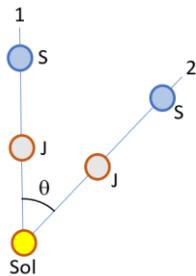
g) Segundo as correspondências dadas, um *baktun* corresponde a  $20 \times 20 \times 18 \times 20 = 144\,000$  *kines*. De forma que o maior período Maia é composto por  $13 \times 144\,000$  *kines* =  $1\,872\,000$  *kines*. Como  $1$  *kin* =  $1$  dia, o maior período Maia possui 5128 anos e 280 dias.

Portanto, a data de início do último maior período Maia é próxima ao dia **16 de março de 3116 a.C.**

22) a) Considerando um observador fixo no Sol o intervalo de tempo entre duas *Grandes Conjunções*, coincide com o período sinódico do sistema, portanto:

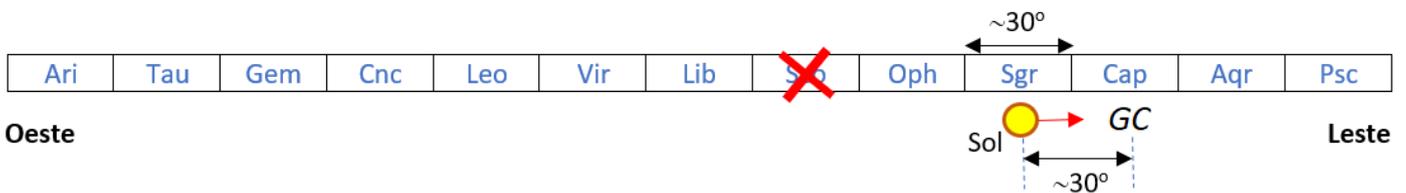
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P_{Júp}} - \frac{1}{P_{Sat}} \Rightarrow \frac{1}{S} = \frac{1}{11,86} - \frac{1}{29,45} \Rightarrow \boxed{S = 19,86 \text{ anos}}$$

O ângulo heliocêntrico é o ângulo  $\theta$ , centrado no Sol, entre as duas conjunções sucessivas. Usando como referência Júpiter, temos:



$$\theta = \frac{360^\circ}{11,86} \cdot 19,86 = 602,83^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = 242,83^\circ}$$

b) No dia 21 de dezembro, que corresponde a um Solstício, o Sol está passando pela constelação de Sagitário. Os planetas estão sempre próximo a eclíptica, logo, a *Grande Conjunção* (GC) vai acontecer com Júpiter e Saturno passando por uma das 13 constelações zodiacais. Podemos estimar o ângulo médio em que a eclíptica atravessa cada constelação dividindo  $360^\circ$  por 12 (lembre-se que o Sol praticamente não cruza Escorpião), ou seja,  $\sim 30^\circ$ .



Como a *Grande Conjunção* vai acontecer a  $30,3^\circ$  a Leste do Sol, Júpiter e Saturno estarão passando por **Capricórnio**.

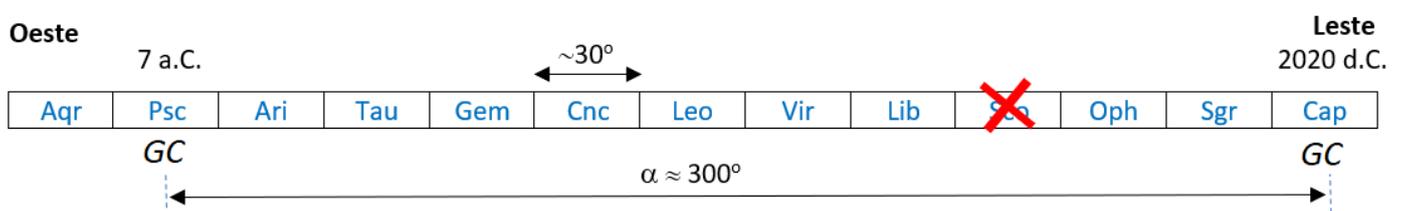
c) Considerando que o intervalo de tempo entre o ano 7a.C. e o ano 2020 d.C. é de 2027 anos, temos que o número ( $n$ ) de *Grandes Conjunções* foram:

$$n = \frac{2027}{19,86} \Rightarrow n = 102,06$$

Neste intervalo, o deslocamento heliocêntrico médio ( $\alpha$ ) da *Grande Conjunção* foi de:

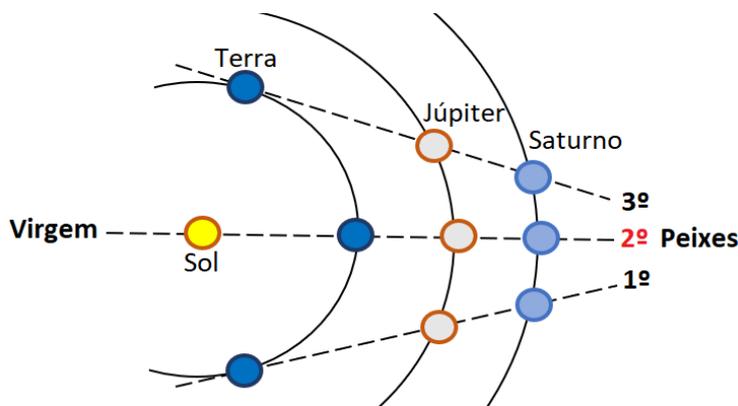
$$\alpha = n \cdot \theta = 102,06 \cdot 242,83^\circ \Rightarrow \alpha = 24784,31^\circ = 304,31^\circ \Rightarrow \alpha \approx 300^\circ$$

Lembrando que em 2020 d.C., a *Grande Conjunção* aconteceu em Capricórnio, no ano 7 a.C o mesmo evento aconteceu a cerca de 10 constelações a Oeste [ $10 \cdot (\sim 30^\circ) = \sim 300^\circ$ ], logo:



Portanto, a *Grande Conjunção* aconteceu na constelação de **Peixes**.

d) A segunda *Grande Conjunção* do ano 7a.C. foi vista, necessariamente, com a Terra em oposição de fase com o Sol. Considerando que a *Grande Conjunção* desse ano aconteceu com Júpiter e Saturno passando pela constelação de Peixes, temos que a constelação em oposição ( $180^\circ \approx 6$  constelações) é **Virgem**.



23) a) Considerando a diferença entre as ascensões retas de Vega (1) e Altair (2) igual a:

$$(\alpha_2 - \alpha_1) = 1h13min51,12s = 18^\circ 27' 48,15''$$

Temos que a separação angular ( $\beta$ ) entre Vega e Altair é dada por:

$$\cos \beta = \text{sen} \delta_1 \cdot \text{sen} \delta_2 + \cos \delta_1 \cdot \cos \delta_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \text{sen}(38^\circ 47' 07,7'') \cdot \text{sen}(8^\circ 52' 13,3'') + \cos(38^\circ 47' 07,7'') \cdot \cos(8^\circ 52' 13,3'') \cdot \cos(18^\circ 27' 48,15'') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \beta = 0,82712 \Rightarrow \boxed{\beta = 34^\circ 11' 45''}$$

b) Conhecendo a paralaxe das estrelas, temos que a distância da Terra até as estrelas Vega (1) e Altair (2), valem:

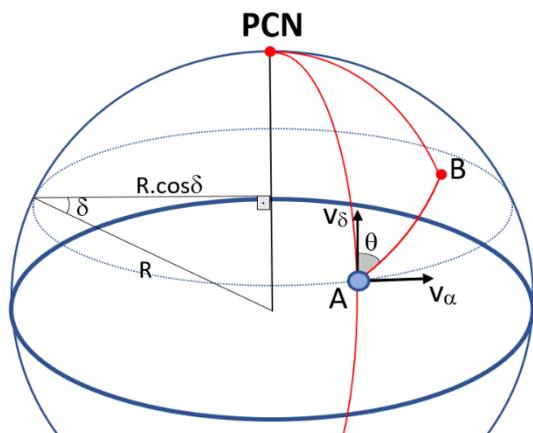
$$r_1 = \frac{1}{130,23 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow r_1 = 7,6787 \text{ pc} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1}{194,95 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow r_2 = 5,1295 \text{ pc}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos, temos que a distância  $d$  entre elas é:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos \beta \Rightarrow d^2 = 7,6787^2 + 5,1295^2 - 2 \cdot 7,6787 \cdot 5,1295 \cdot \cos(34^\circ 11' 45'') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d^2 = 20,1171 \Rightarrow \boxed{d = 4,4852 \text{ pc}}$$

c) O movimento aparente de um astro na esfera celeste pode ser decomposto em um movimento devido a mudança da declinação ao longo do tempo ( $v_\delta$ ) e também devido a mudança da ascensão reta pelo tempo ( $v_\alpha$ ); são os chamados vetores de movimento próprio. Note que a velocidade radial não causa mudança na posição do astro na esfera celeste. Representando esquematicamente uma situação qualquer em que um astro sofre um **pequeno** deslocamento de A para B na esfera celeste (figura abaixo fora de escala), temos que o ângulo de posição ( $\theta$ ) entre os vetores de movimento próprio, pode ser calculado por:



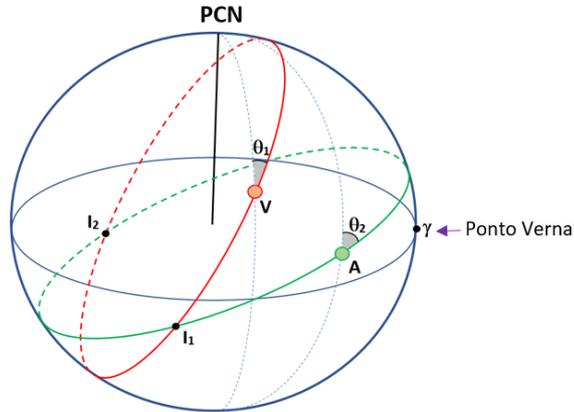
$$\text{tg} \theta = \frac{v_\alpha}{v_\delta} = \frac{\mu_\alpha \cdot R \cos \delta}{\mu_\delta \cdot R} \Rightarrow \text{tg} \theta = \frac{\mu_\alpha \cdot \cos \delta}{\mu_\delta}$$

OBS: Por definição, o ângulo de posição ( $\theta$ ) corresponde ao ângulo entre o arco do movimento aparente do astro na esfera celeste (AB) e o arco que o liga ao Polo Celeste Norte (AP<sub>CN</sub>).

Portanto, os ângulos de posição para Vega ( $\theta_1$ ) e para Altair ( $\theta_2$ ), valem:

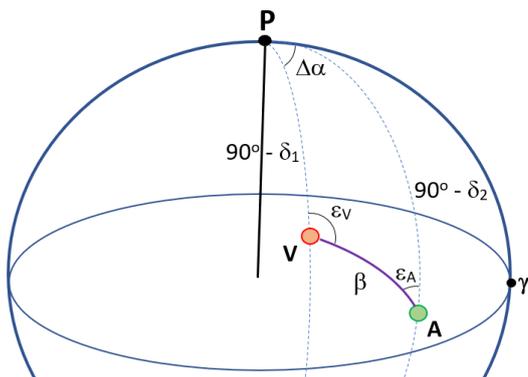
$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{(\mu_\alpha \cdot \cos\delta)_1}{(\mu_\delta)_1} = \frac{200,94}{286,63} \Rightarrow \theta_1 = 35^\circ 04' 11'' \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{(\mu_\alpha \cdot \cos\delta)_2}{(\mu_\delta)_2} = \frac{536,23}{385,29} \Rightarrow \theta_2 = 54^\circ 27' 12,5''$$

d) A partir das informações da tabela ( $\delta$  e  $\alpha$ ) e dos ângulos de posição calculados do item c, podemos representar as trajetórias de Vega (1) e Altair (2) na esfera celeste. Esquematicamente, temos:



Portanto, temos **2 pontos** em comum entre as trajetórias aparentes de Vega e Altair na esfera celeste. Note que o ponto de intersecção  $I_1$  está mais próximo das estrelas Vega e Altair que o ponto  $I_2$ .

e) Aplicando a Lei dos Senos no triângulo PVA (Polo celeste Norte, Vega e Altair), temos:



$$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_A}{\operatorname{sen}(90^\circ - \delta_1)} = \frac{\operatorname{sen}\Delta\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_A}{\operatorname{sen}(90^\circ - 38^\circ 47' 07,7'')} = \frac{\operatorname{sen}(18^\circ 27' 48,15'')}{\operatorname{sen}34^\circ 11' 45''} \Rightarrow$$

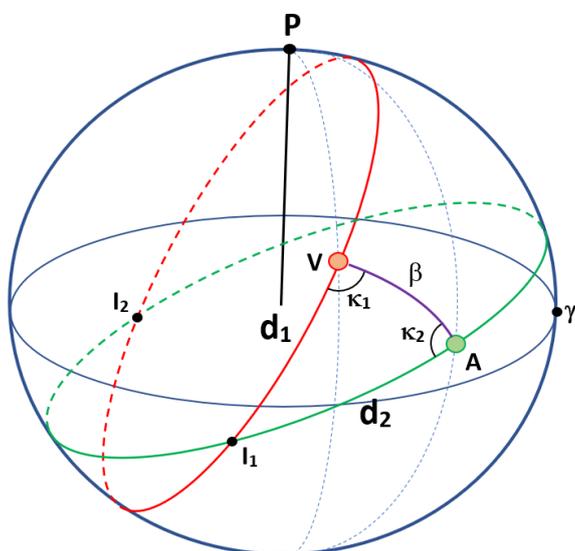
$$\Rightarrow \operatorname{sen}\varepsilon_A = 0,4392 \Rightarrow \varepsilon_A = 26,055^\circ$$

$$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_V}{\operatorname{sen}(90^\circ - \delta_2)} = \frac{\operatorname{sen}\Delta\alpha}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_V}{\operatorname{sen}(90^\circ - 8^\circ 52' 13,37'')} = \frac{\operatorname{sen}(18^\circ 27' 48,15'')}{\operatorname{sen}34^\circ 11' 45''} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\varepsilon_V = 0,5567 \Rightarrow \varepsilon_V = 33,83^\circ \text{ ou } 146,16^\circ$$

Da figura, temos que  $\varepsilon_V > 90^\circ$  portanto,  $\varepsilon_V = 146,16^\circ$ .

Conhecendo os valores de  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ , podemos aplicar a Lei das Cotangentes no triângulo esférico  $VI_1A$  (Vega, ponto de intersecção mais próximo, Altair) para determinar a distância ( $d_1$ ) entre os pontos  $VI_1$ ; e pela Lei dos Senos determinar a distância ( $d_2$ ) entre os pontos  $AI_1$ , logo:



$$\varepsilon_V - \theta_1 + \kappa_1 = 180^\circ \Rightarrow \kappa_1 = 180^\circ - 146,16^\circ + 35,07^\circ \Rightarrow \kappa_1 = 68,91^\circ$$

$$\theta_2 + \varepsilon_A + \kappa_2 = 180^\circ \Rightarrow \kappa_2 = 180^\circ - 25,066^\circ - 54,453^\circ \Rightarrow \kappa_2 = 100,48^\circ$$

Valor de  $d_1$ :

$$\operatorname{cot}d_1 \cdot \operatorname{sen}\beta = \cos\beta \cdot \cos\kappa_1 + \operatorname{sen}\kappa_1 \operatorname{cot}\kappa_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{cot}d_1 \cdot \operatorname{sen}34,196^\circ = \cos34,196^\circ \cdot \cos68,91^\circ + \operatorname{sen}68,91^\circ \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}100,48^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{cot}d_1 = 0,222 \Rightarrow \operatorname{tg}d_1 = \frac{1}{0,222} \Rightarrow d_1 = 77,457^\circ$$

Valor de  $d_2$ :

$$\frac{\operatorname{sen}d_2}{\operatorname{sen}\kappa_1} = \frac{\operatorname{sen}d_1}{\operatorname{sen}\kappa_2} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}d_2}{\operatorname{sen}68,91^\circ} = \frac{\operatorname{sen}77,457^\circ}{\operatorname{sen}100,48^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}d_2 = 0,9262 \Rightarrow d_2 = 67,85^\circ$$

Podemos determinar a declinação ( $\delta_3$ ) do ponto de intersecção  $I_1$  aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo  $PVI_1$  (Polo Celeste Norte, Vega, ponto  $I_1$ ), então:

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta_3) &= \cos d_1 \cdot \cos(90^\circ - \delta_1) + \text{sen} d_1 \cdot \text{sen}(90^\circ - \delta_1) \cos(180^\circ - \theta_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sen} \delta_3 &= \cos 77,457^\circ \cdot \text{sen} 38,785^\circ + \text{sen} 77,457^\circ \cdot \cos 38,785^\circ \cdot \cos(180^\circ - 35,07^\circ) \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{sen} \delta_3 &= -0,4867 \Rightarrow \boxed{\delta_3 = -29^\circ 07' 26''} \end{aligned}$$

Já para a ascensão reta ( $\alpha_3$ ) do ponto de intersecção  $I_1$ , podemos aplicar a Lei dos Senos no triângulo no triângulo  $PVI_1$ , portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen} d_1}{\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_3)} &= \frac{\text{sen}(90^\circ - \delta_3)}{\text{sen}(180^\circ - \theta_1)} \Rightarrow \frac{\text{sen} 77,457^\circ}{\text{sen}(\alpha_1 - \alpha_3)} = \frac{\cos(-29,124^\circ)}{\text{sen}(180^\circ - 35,07^\circ)} \Rightarrow \text{sen}(\alpha_1 - \alpha_3) = 0,6420 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_3 &= 39,94^\circ = 2h39min46,5'' \Rightarrow \alpha_3 = 18h36min56,49s - 2h39min46,5'' \Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 15h57'10''} \end{aligned}$$

f) O movimento próprio dos astros ( $\mu$ ) na esfera celeste de raio  $R$  é dado por:

$$v^2 = v_\delta^2 + v_\alpha^2 \Rightarrow (\mu \cdot R)^2 = (\mu_\delta \cdot R)^2 + (\mu_\alpha \cdot R \cos \delta)^2 \Rightarrow \mu^2 = \mu_\delta^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)^2$$

Logo, o movimento próprio de Vega ( $\mu_1$ ):

$$\mu_1^2 = \mu_{\delta 1}^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)_1^2 = 286,23^2 + 200,94^2 \Rightarrow \mu_1 = 349,72 \text{ mas/ano}$$

Para Altair ( $\mu_2$ ):

$$\mu_2^2 = \mu_{\delta 2}^2 + (\mu_\alpha \cos \delta)_2^2 = 385,29^2 + 536,23^2 \Rightarrow \mu_2 = 660,30 \text{ mas/ano}$$

Conhecendo os arcos  $d_1$  e  $d_2$  (calculados no item e) que separam Vega e Altair do ponto de intersecção  $I_1$ , da definição da velocidade angular média, temos que o tempo que cada astro levou para percorrer estes arcos é:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{d_1}{\Delta t_1} \Rightarrow \frac{0,34972''}{1 \text{ ano}} = \frac{77,457^\circ}{\Delta t_1} \cdot \frac{3600''}{1^\circ} \Rightarrow \Delta t_1 = 7,98 \cdot 10^5 \text{ anos} \\ \mu_2 &= \frac{d_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{0,66030''}{1 \text{ ano}} = \frac{67,85^\circ}{\Delta t_2} \cdot \frac{3600''}{1^\circ} \Rightarrow \Delta t_2 = 3,70 \cdot 10^5 \text{ anos} \end{aligned}$$

Portanto, Vega passou pelo ponto  $I_1$  por volta do ano **796000 a.C.** e Altair por volta do ano **350000 a.C.** .

g) O deslocamento angular ( $d_3$ ) de Vega no intervalo de tempo em que Altair esteve no ponto de intersecção  $I_1$  foi:

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{d_3}{\Delta t_2} \\ \Delta t_2 = 3,70 \cdot 10^5 \text{ ano} \end{cases} \Rightarrow \frac{0,34972''}{1 \text{ ano}} = \frac{d_3}{3,70 \cdot 10^5} \cdot \frac{3600''}{1^\circ} \Rightarrow d_3 = 35,943^\circ$$

Neste instante sua distância angular ( $d$ ) a Altair será:

$$d = d_1 - d_3 = 77,457^\circ - 35,943^\circ \Rightarrow \boxed{d = 41,513^\circ}$$

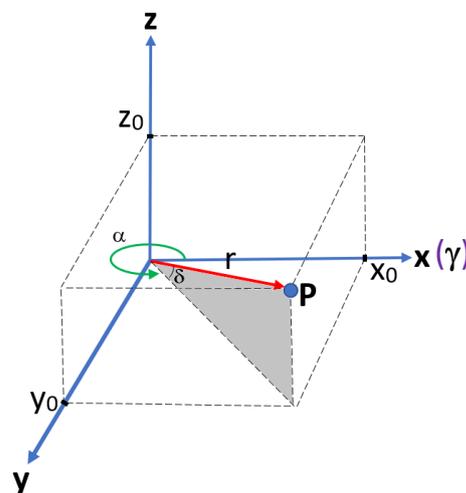
h) Para descobriremos se as trajetórias de Vega e Altair se encontram no espaço tridimensional e a possível coordenada ( $x, y, z$ ) comum para as duas trajetórias, deve-se inicialmente levantar as equações horárias que descrevem o movimento dos astros por eixos do sistema cartesiano tridimensional.

Considerando um astro  $P$  qualquer no espaço tridimensional, com a Terra na origem e o eixo  $x$  alinhado com o Ponto Vernal ( $\gamma$ ), suas coordenadas de posição podem ser expressas por:

$$x_0 = r \cdot \cos \delta \cdot \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$y_0 = r \cdot \cos \delta \cdot \text{sen}(360^\circ - \alpha)$$

$$z_0 = r \cdot \text{sen} \delta$$



Aplicando as informações de Vega (V), vem:

$$x_{V0} = r_1 \cdot \cos\delta_1 \cdot \cos(360^\circ - \alpha_1) = 7,6787 \cdot \cos 38,785^\circ \cdot \cos(360^\circ - 279,235^\circ) \Rightarrow x_{V0} = 0,9606 pc = 2,968 \cdot 10^{13} km$$

$$y_{V0} = r_1 \cdot \cos\delta_1 \cdot \sin(360^\circ - \alpha_1) = 7,6787 \cdot \cos 38,785^\circ \cdot \sin(360^\circ - 279,235^\circ) \Rightarrow y_{V0} = 5,9080 pc = 1,825 \cdot 10^{14} km$$

$$z_{V0} = r_1 \cdot \sin\delta_1 = 7,6787 \cdot \sin 38,785^\circ \Rightarrow z_{V0} = 4,8099 pc = 1,486 \cdot 10^{14} km$$

Analogamente, para Altair (A):

$$x_{A0} = r_2 \cdot \cos\delta_2 \cdot \cos(360^\circ - \alpha_2) = 5,1295 \cdot \cos 8,870^\circ \cdot \cos(360^\circ - 297,698^\circ) \Rightarrow x_{A0} = 2,3557 pc = 7,279 \cdot 10^{13} km$$

$$y_{A0} = r_2 \cdot \cos\delta_2 \cdot \sin(360^\circ - \alpha_2) = 5,1295 \cdot \cos 8,870^\circ \cdot \sin(360^\circ - 297,698^\circ) \Rightarrow y_{A0} = 4,4874 pc = 1,387 \cdot 10^{14} km$$

$$z_{A0} = r_2 \cdot \sin\delta_2 = 5,1295 \cdot \sin 8,870^\circ \Rightarrow z_{A0} = 0,7909 pc = 2,444 \cdot 10^{13} km$$

No espaço tridimensional, vamos considerar três componentes de velocidades dos astros: mudança da declinação ao longo do tempo ( $v_\delta$ ), mudança da ascensão reta pelo tempo ( $v_\alpha$ ) e a velocidade radial ( $v_r$ ). Os respectivos valores são:

Para Vega (V):

$$v_{\delta V} = \mu_{\delta 1} \cdot r_1 = \frac{0,28623''}{1 \text{ ano}} \cdot 7,6787 pc \Rightarrow v_{\delta V} = \frac{1,387 \cdot 10^{-6} \text{ rad}}{3,153 \cdot 10^7 \text{ s}} \cdot 7,6787 \cdot 3,09 \cdot 10^{13} km \Rightarrow v_{\delta V} = 10,437 km \cdot s^{-1}$$

$$v_{\alpha V} = \mu_\alpha \cdot r_1 \cos\delta_1 = \frac{0,20094''}{1 \text{ ano}} \cdot 7,6787 pc \Rightarrow v_{\alpha V} = \frac{9,74 \cdot 10^{-7} \text{ rad}}{3,153 \cdot 10^7 \text{ s}} \cdot 7,6787 \cdot 3,09 \cdot 10^{13} km \Rightarrow v_{\alpha V} = 7,330 km \cdot s^{-1}$$

$$v_{rV} = -13,9 km \cdot s^{-1}$$

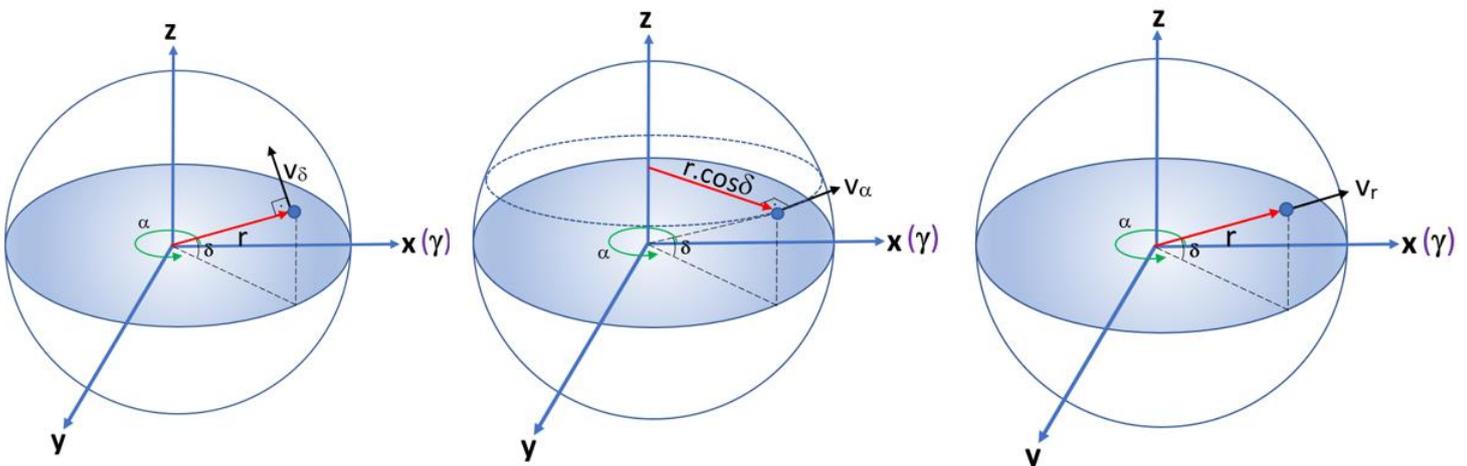
Para Altair (A):

$$v_{\delta A} = \mu_{\delta 2} \cdot r_2 = \frac{0,38529''}{1 \text{ ano}} \cdot 5,1295 pc \Rightarrow v_{\delta A} = \frac{1,867 \cdot 10^{-6} \text{ rad}}{3,153 \cdot 10^7 \text{ s}} \cdot 5,1295 \cdot 3,09 \cdot 10^{13} km \Rightarrow v_{\delta A} = 9,385 km \cdot s^{-1}$$

$$v_{\alpha A} = \mu_\alpha \cdot r_2 \cos\delta_2 = \frac{0,53623''}{1 \text{ ano}} \cdot 5,1295 pc \Rightarrow v_{\alpha A} = \frac{2,599 \cdot 10^{-6} \text{ rad}}{3,153 \cdot 10^7 \text{ s}} \cdot 5,1295 \cdot 3,09 \cdot 10^{13} km \Rightarrow v_{\alpha A} = 13,065 km \cdot s^{-1}$$

$$v_{rA} = -26,1 km \cdot s^{-1}$$

Cada uma dessas velocidades pode ser decomposta nos três eixos cartesianos já definido anteriormente. Seus valores obedecem às seguintes relações:



$$v_{\delta x} = -v_\delta \cdot \sin\delta \cdot \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$v_{\delta y} = -v_\delta \cdot \sin\delta \cdot \sin(360^\circ - \alpha)$$

$$v_{\delta z} = v_\delta \cdot \cos\delta$$

$$v_{\alpha x} = v_\alpha \cdot \sin(360^\circ - \alpha)$$

$$v_{\alpha y} = -v_\alpha \cdot \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$v_{\alpha z} = 0$$

$$v_{rx} = v_r \cdot \cos\delta \cdot \cos(360^\circ - \alpha)$$

$$v_{ry} = v_r \cdot \cos\delta \cdot \sin(360^\circ - \alpha)$$

$$v_{rz} = v_r \cdot \sin\delta$$

O valor dessas componentes para:

Vega:

$$v_{\delta V_x} = -v_{\delta V} \cdot \text{sen} \delta_1 \cdot \cos(360^\circ - \alpha_1) = -10,437 \cdot \text{sen} 38,785^\circ \cdot \cos(360^\circ - 279,235^\circ) \Rightarrow v_{\delta V_x} = -1,049 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{\delta V_y} = -v_{\delta V} \cdot \text{sen} \delta_1 \cdot \text{sen}(360^\circ - \alpha_1) = -10,437 \cdot \text{sen} 38,785^\circ \cdot \text{sen}(360^\circ - 279,235^\circ) \Rightarrow v_{\delta V_y} = -6,453 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{\delta V_z} = v_{\delta V} \cdot \cos \delta_1 = 10,437 \cdot \cos 38,785^\circ \Rightarrow v_{\delta V_z} = 8,135 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{\alpha V_x} = v_{\alpha V} \cdot \text{sen}(360^\circ - \alpha_1) = 7,330 \cdot \text{sen}(360^\circ - 279,235^\circ) \Rightarrow v_{\alpha V_x} = 7,235 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{\alpha V_y} = -v_{\alpha V} \cdot \cos(360^\circ - \alpha_1) = -7,330 \cdot \cos(360^\circ - 279,235^\circ) \Rightarrow v_{\alpha V_y} = -1,176 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{rV_x} = v_{rV} \cdot \cos \delta_1 \cdot \cos(360^\circ - \alpha_1) = -13,9 \cdot \cos 38,785^\circ \cdot \cos(360^\circ - 279,235^\circ) \Rightarrow v_{rV_x} = -1,738 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{rV_y} = v_{rV} \cdot \cos \delta_1 \cdot \text{sen}(360^\circ - \alpha_1) = -13,9 \cdot \cos 38,785^\circ \cdot \text{sen}(360^\circ - 279,235^\circ) \Rightarrow v_{rV_y} = -10,695 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{rV_z} = v_{rV} \cdot \text{sen} \delta_1 = -13,9 \cdot \text{sen} 38,785^\circ \Rightarrow v_{rV_z} = -8,707 \text{ km.s}^{-1}$$

Altair:

$$v_{\delta A_x} = -v_{\delta A} \cdot \text{sen} \delta_2 \cdot \cos(360^\circ - \alpha_2) = -9,385 \cdot \text{sen} 8,87^\circ \cdot \cos(360^\circ - 297,698^\circ) \Rightarrow v_{\delta A_x} = -0,672 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{\delta A_y} = -v_{\delta A} \cdot \text{sen} \delta_2 \cdot \text{sen}(360^\circ - \alpha_2) = -9,385 \cdot \text{sen} 8,87^\circ \cdot \text{sen}(360^\circ - 297,698^\circ) \Rightarrow v_{\delta A_y} = -1,281 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{\delta A_z} = v_{\delta A} \cdot \cos \delta_2 = 9,385 \cdot \cos 8,87^\circ \Rightarrow v_{\delta A_z} = 9,273 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{\alpha A_x} = v_{\alpha A} \cdot \text{sen}(360^\circ - \alpha_2) = 13,065 \cdot \text{sen}(360^\circ - 297,698^\circ) \Rightarrow v_{\alpha A_x} = 11,568 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{\alpha A_y} = -v_{\alpha A} \cdot \cos(360^\circ - \alpha_2) = -13,065 \cdot \cos(360^\circ - 297,698^\circ) \Rightarrow v_{\alpha A_y} = -6,073 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{rA_x} = v_{rA} \cdot \cos \delta_2 \cdot \cos(360^\circ - \alpha_2) = -26,1 \cdot \cos 8,87^\circ \cdot \cos(360^\circ - 297,698^\circ) \Rightarrow v_{rA_x} = -11,986 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{rA_y} = v_{rA} \cdot \cos \delta_2 \cdot \text{sen}(360^\circ - \alpha_2) = -26,1 \cdot \cos 8,87^\circ \cdot \text{sen}(360^\circ - 297,698^\circ) \Rightarrow v_{rA_y} = -22,833 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{rA_z} = v_{rA} \cdot \text{sen} \delta_2 = -26,1 \cdot \text{sen} 8,87^\circ \Rightarrow v_{rA_z} = -4,024 \text{ km.s}^{-1}$$

As velocidades resultantes nos eixos x, y e z valem:

Para Vega:

$$v_{V_x} = v_{\delta V_x} + v_{\alpha V_x} + v_{rV_x} = -1,049 + 7,235 - 1,738 \Rightarrow v_{V_x} = 4,448 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{V_y} = v_{\delta V_y} + v_{\alpha V_y} + v_{rV_y} = -6,453 - 1,176 - 10,695 \Rightarrow v_{V_y} = -18,324 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{V_z} = v_{\delta V_z} + v_{\alpha V_z} + v_{rV_z} = 8,135 - 8,707 \Rightarrow v_{V_z} = -0,572 \text{ km.s}^{-1}$$

Para Altair:

$$v_{A_x} = v_{\delta A_x} + v_{\alpha A_x} + v_{rA_x} = -0,672 + 11,568 - 11,986 \Rightarrow v_{A_x} = -1,09 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{A_y} = v_{\delta A_y} + v_{\alpha A_y} + v_{rA_y} = -1,281 - 6,073 - 22,833 \Rightarrow v_{A_y} = -30,187 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_{A_z} = v_{\delta A_z} + v_{\alpha A_z} + v_{rA_z} = 9,273 - 4,024 \Rightarrow v_{A_z} = 5,249 \text{ km.s}^{-1}$$

Assumindo que todas as velocidades são constantes, temos que a equações de movimento das estrelas Vega e Altair, por eixos, são:

Para Vega:

$$x_V = x_{V0} + v_{V_x} \cdot t \Rightarrow x_V = 2,968 \cdot 10^{13} + 4,448 \cdot t$$

$$y_V = y_{V0} + v_{V_y} \cdot t \Rightarrow y_V = 1,824 \cdot 10^{14} - 18,324 \cdot t$$

$$z_V = z_{V0} + v_{V_z} \cdot t \Rightarrow z_V = 1,486 \cdot 10^{14} - 0,572 \cdot t$$

Para Altair:

$$x_A = x_{A0} + v_{A_x} \cdot t \Rightarrow x_A = 7,279 \cdot 10^{13} - 1,09 \cdot t$$

$$y_A = y_{A0} + v_{A_y} \cdot t \Rightarrow y_A = 1,387 \cdot 10^{14} - 30,187 \cdot t$$

$$z_A = z_{A0} + v_{A_z} \cdot t \Rightarrow z_A = 2,444 \cdot 10^{13} + 5,249 \cdot t$$

Para termos pontos em comum nas trajetórias de Vega e Altair, as equações horárias devem satisfazer a condição tal que:

$$(x_V = x_A, y_V = y_A, z_V = z_A)$$

Logo:

$$2,968 \cdot 10^{13} + 4,448 \cdot t = 7,279 \cdot 10^{13} - 1,09 \cdot t$$

$$1,824 \cdot 10^{14} - 18,324 \cdot t = 1,387 \cdot 10^{14} - 30,187 \cdot t$$

$$1,486 \cdot 10^{14} - 0,572 \cdot t = 2,444 \cdot 10^{13} + 5,249 \cdot t$$

Verifica-se que as equações acima não possuem solução comum. Portanto, conclui-se que as trajetórias de Vega e Altair não se cruzam em nenhum ponto, ou seja, são trajetórias reversas no espaço tridimensional.

## Soluções: Astrofísica

1) Da relação de magnitudes, temos:

$$m_{olho} - m_{hubble} = -2,5 \log \left( \frac{L_{olho}}{4\pi d_L^2} \cdot \frac{4\pi d_H^2}{L_{Hubble}} \right) \Rightarrow \boxed{d_H = 6,4 \times 10^4 d_L}$$

2) Se a supernova aparece tão brilhante quanto o Sol, devemos receber o mesmo fluxo de ambos os corpos celestes. Desta maneira, da relação de Fluxo, temos:

$$F_{SN} = F_{\odot} \Rightarrow \frac{10\,000 L_{\odot}}{4\pi d^2} = \frac{L_{\odot}}{4\pi (1 \text{ ua})^2} \Rightarrow \boxed{d = 100\,000 \text{ ua} = 1,49 \times 10^{16} \text{ m}}$$

3) Vamos considerar  $m_A = 2,0$ ,  $m_B = +1,5$  e  $m_C = +3,0$ .

a) A magnitude combinada  $m_{AB}$  é determinada relacionando as magnitudes entre as estrelas A e B. Logo:

$$\begin{aligned} m_A - m_B &= -2,5 \cdot \log \left( \frac{F_A}{F_B} \right) \Rightarrow F_A = F_B \cdot 10^{\frac{m_B - m_A}{2,5}} \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{AB} &= F_A + F_B = F_B \left( 1 + 10^{\frac{m_B - m_A}{2,5}} \right) \Rightarrow m_{AB} - m_B = -2,5 \cdot \log \left( \frac{F_{AB}}{F_B} \right) = -2,5 \cdot \log \left( 1 + 10^{\frac{m_B - m_A}{2,5}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow m_{AB} &= 1,5 - 2,5 \cdot \log \left( 1 + 10^{\frac{1,5 - 2,0}{2,5}} \right) \Rightarrow m_{AB} = 0,97 \end{aligned}$$

De maneira análoga, podemos obter a relação entre os fluxos  $F_C$  e  $F_{AB}$ , dada por:

$$F_C = F_{AB} \cdot 10^{\frac{m_{AB} - m_C}{2,5}}$$

Considerando  $m_T$  como a magnitude do conjunto de estrelas (e,  $F_T = F_A + F_B + F_C$ ), temos que

$$m_T - m_{AB} = -2,5 \cdot \log \left( \frac{F_T}{F_{AB}} \right) = -2,5 \cdot \log \left( 1 + 10^{\frac{m_{AB} - m_C}{2,5}} \right) \therefore \boxed{m_T = 0,81}$$

b) Considerando que a paralaxe média é de  $0,02''$ , podemos dizer que:

$$\frac{\pi_A + \pi_B + \pi_C}{3} = 0,02'' \Rightarrow \pi_A + \pi_B + \pi_C = \pi_T = 0,06''$$

Sendo  $\pi_A$ ,  $\pi_B$ , e  $\pi_C$  as paralaxes das estrelas A, B e C, respectivamente.

Da relação entre magnitude absoluta e magnitude visual ( $m_A - M_A = 5 \cdot \log d_A - 5$ ), sendo  $d_A = \frac{1}{\pi_A}$ , é possível obter a relação entre a paralaxe e a magnitude aparente da estrela.

$$\pi = \frac{10^{\frac{M_A - m_A}{5}}}{10} = \frac{10^{\frac{M_A}{5}}}{10} \cdot 10^{-\frac{m_A}{5}}$$

Como  $M_A = M_B = M_C = M_V$ , é possível obter o valor da magnitude absoluta das estrelas usando as magnitudes aparentes  $m_A$ ,  $m_B$  e  $m_C$

$$\pi_T = \frac{10^{\frac{M}{5}}}{10} \cdot \left( 10^{-\frac{m_A}{5}} + 10^{-\frac{m_B}{5}} + 10^{-\frac{m_C}{5}} \right) = 0,06 \therefore \boxed{M_V = -1,41}$$

Desta forma, com o valor da magnitude absoluta, é possível determinar a paralaxe individual de cada estrela

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_A = \frac{10^{\frac{-1,41}{5}}}{10} \cdot 10^{-\frac{2}{5}} \\ \pi_B = \frac{10^{\frac{-1,41}{5}}}{10} \cdot 10^{-\frac{1,5}{5}} \\ \pi_C = \frac{10^{\frac{-1,41}{5}}}{10} \cdot 10^{-\frac{3}{5}} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \pi_A = 0,021'' \\ \pi_B = 0,026'' \\ \pi_C = 0,013'' \end{array}}$$

4) a) Da figura 2, obtém-se que o período da cefeída é da ordem de 11 dias. Além disso, a magnitude média aparente é

$$m = \frac{14,8 + 14,1}{2} \Rightarrow m = 14,45$$

Através da figura 1, sabemos que a magnitude absoluta desta cefeída é  $M \approx -4,2$ . Da relação do módulo de distância:

$$m - M = 5 \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow 14,45 - (-4,2) = 5 \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow d = 10^{4,73} \therefore \boxed{d = 53,7 \text{ kpc}}$$

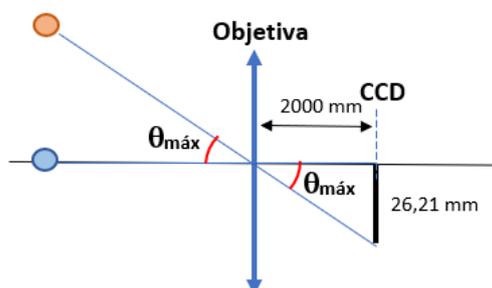
b) Assumindo  $A = 0,25$ , temos que o módulo de distância será:

$$(m + A) - M = 5 \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow (14,45 + 0,25) - (-4,2) = m - M = 5 \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow d = 10^{4,78} \therefore \boxed{d = 60,2 \text{ kpc}}$$

5) A distância focal da objetiva do telescópio de razão focal  $f/10$  ( $R=10$ ) é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{f_{ob}}{D} \\ D = 200mm \end{array} \right. \Rightarrow 10 = \frac{f_{ob}}{200} \Rightarrow f_{ob} = 2000mm$$

Colocando o CCD de 4096 x 4096 pixels, o equivalente a um quadrado de 26,21 mm x 26,21 mm, no plano focal da objetiva, temos que a separação angular máxima ( $\theta_{m\acute{a}x}$ ) que o CCD consegue captar é:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_{m\acute{a}x} &= \frac{26,21}{2000} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_{m\acute{a}x} = 0,013 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \theta_{m\acute{a}x} = 45'' \end{aligned}$$

a) A separação angular  $\theta_{12}$  entre as estrelas 1 e 2 é dada por:

$$\begin{aligned}\cos\theta_{12} &= \text{sen}\delta_1 \cdot \text{sen}\delta_2 + \cos\delta_1 \cdot \cos\delta_2 \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\theta_{12} &= \text{sen}(35^\circ 20') \cdot \text{sen}(34^\circ 40') + \cos(35^\circ 20') \cdot \cos(35^\circ 40') \cdot \cos(97,5^\circ - 97,5^\circ) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos\theta_{12} = 0,999932 \Rightarrow \theta_{12} = 40''\end{aligned}$$

Portanto, como  $\theta_{12} < \theta_{\text{máx}}$ , **é possível** que as estrelas 1 e 2 apareçam juntas na mesma placa.

b) A separação angular  $\theta_{13}$  entre as estrelas 1 e 3 é dada por:

$$\begin{aligned}\cos\theta_{13} &= \text{sen}\delta_1 \cdot \text{sen}\delta_3 + \cos\delta_1 \cdot \cos\delta_3 \cdot \cos(\alpha_3 - \alpha_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\theta_{13} &= \text{sen}(35^\circ 20') \cdot \text{sen}(35^\circ 20') + \cos(35^\circ 20') \cdot \cos(35^\circ 20') \cdot \cos(96^\circ - 97,5^\circ) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos\theta_{13} = 0,999771 \Rightarrow \theta_{13} = 73,42''\end{aligned}$$

Portanto, como  $\theta_{13} > \theta_{\text{máx}}$ , **não é possível** que as estrelas 1 e 3 apareçam juntas na mesma placa.

6) Considerando que os fótons passem próximos aos astros, ou seja, aproximando  $d = R_{\text{astro}}$ , relacionando as equações do desvio, temos:

Para Júpiter:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\theta_J}{\Delta\theta_{\text{Sol}}} &= \frac{\frac{4GM_J}{R_J c^2}}{\frac{4GM_{\text{Sol}}}{R_{\text{Sol}} c^2}} = \frac{M_J}{R_J} \cdot \frac{R_{\text{Sol}}}{M_{\text{Sol}}} \Rightarrow \Delta\theta_J = \frac{M_J}{R_J} \cdot \frac{R_{\text{Sol}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \Delta\theta_{\text{Sol}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\theta_J &= \frac{1,898 \cdot 10^{27}}{69911} \cdot \frac{696340}{1,989 \cdot 10^{30}} \cdot 1,75 \Rightarrow \Delta\theta_J = 0,0166'' = \boxed{16,6\text{mas}}\end{aligned}$$

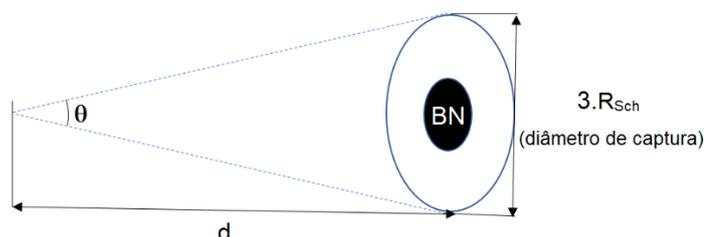
Como  $\Delta\theta_J$  é maior que a precisão atual (0,1mas), **SIM** é possível detectar a deflexão dos fótons devido ao campo gravitacional de Júpiter.

Para Lua:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\theta_L}{\Delta\theta_{\text{Sol}}} &= \frac{\frac{4GM_L}{R_L c^2}}{\frac{4GM_{\text{Sol}}}{R_{\text{Sol}} c^2}} = \frac{M_L}{R_L} \cdot \frac{R_{\text{Sol}}}{M_{\text{Sol}}} \Rightarrow \Delta\theta_L = \frac{M_L}{R_L} \cdot \frac{R_{\text{Sol}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \Delta\theta_{\text{Sol}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\theta_L &= \frac{7,36 \cdot 10^{22}}{17371} \cdot \frac{696340}{1,989 \cdot 10^{30}} \cdot 1,75 \Rightarrow \Delta\theta_L = 2,59 \cdot 10^{-5} = \boxed{0,0259\text{mas}}\end{aligned}$$

Como  $\Delta\theta_L$  é menor que a precisão atual (0,1mas), **NÃO** é possível detectar a deflexão dos fótons devido ao campo gravitacional da Lua.

7) a) Como o diâmetro de captura de fótons é três vezes o raio do horizonte de eventos, dado pela equação de Schwarzschild ( $R_{\text{Sch}}$ ), temos que o diâmetro  $D$  do instrumento pode ser expresso por:



$$\left| \begin{array}{l} \theta \geq 1,22 \frac{\lambda}{D} \\ \theta = \frac{3R_{Sch}}{d} \Rightarrow \frac{3}{d} \cdot \frac{2GM}{c^2} \geq 1,22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \boxed{D \geq \frac{1,22\lambda c^2 d}{6GM}} \\ R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2} \end{array} \right.$$

b) Considerando  $\lambda=1,33\text{mm} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , temos:

i. buraco negro supermassivo em M87

$$D_i = \frac{1,22\lambda c^2 d_{BH-M87}}{6GM_{BH-M87}} = \frac{1,22 \cdot 1,33 \cdot 10^{-3} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 5,5 \cdot 10^7 \cdot 9,641 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,5 \cdot 10^9 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}} \Rightarrow D_i \approx 37425 \text{ km} \Rightarrow \boxed{D_i \approx 0,585 R_{Terra}}$$

ii. Sgr A\*, o buraco negro supermassivo da nossa própria galáxia

$$D_i = \frac{1,22\lambda c^2 d_{SgrA^*}}{6GM_{SgrA^*}} = \frac{1,22 \cdot 1,33 \cdot 10^{-3} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 8,3 \cdot 10^3 \cdot 3,086 \cdot 10^{13}}{6 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,6 \cdot 10^6 \cdot 1,989 \cdot 10^{30}} \Rightarrow D_{ii} \approx 3263 \text{ km} \Rightarrow \boxed{D_{ii} \approx 0,51 R_{Terra}}$$

c) Alternativa B

A interferometria é a técnica óptica que consiste em combinar a radiação vinda de uma fonte em diferentes receptores (telescópios, por exemplo) para obter uma imagem com maior resolução. Esta técnica é mais utilizada em radioastronomia (grandes comprimentos de onda) sendo mais difícil a sua implementação em comprimentos de onda mais curtos. A principal razão é o aumento da precisão mecânica exigida cada vez que diminuimos o comprimento de onda.

8) a) Considerando que a estrela permanece sempre a mesma distância D da terra, o fluxo luminoso (F) da estrela pode ser expresso por:

$$\left| \begin{array}{l} F = \frac{L}{4\pi D^2} \\ L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot b^4}{D^2 \cdot \lambda^4} \\ \lambda \cdot T = b \end{array} \right.$$

Da equação geral das magnitudes, sendo 1 quando a estrela está mais contraída e 2 mais expandida, temos:

$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4}\right) \Rightarrow 3,46 - 4,08 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4} = 10^{0,248} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 10^{0,124} \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 10^{0,124} \cdot \left(\frac{531}{649,1}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = 0,89} \end{aligned}$$

b) Considerando a velocidade de expansão é constante, e que 1 dia possui 86400 s, temos:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{R_2 - R_1}{\frac{P}{2}} \Rightarrow 12,8 = \frac{R_2 - R_1}{4,92 \cdot 86400} \Rightarrow R_2 - R_1 = 5,411 \cdot 10^9 \text{ m}$$

Logo:

$$\left| \begin{array}{l} R_2 - R_1 = 5,411 \cdot 10^9 \text{ m} \\ R_1 = 0,89 \cdot R_2 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{R_1 = 4,38 \cdot 10^{10} \text{ m}} \text{ e } \boxed{R_2 = 4,92 \cdot 10^{10} \text{ m}}$$

c) Comparando o fluxo da estrela no seu estado de maior expansão ( $F_2$ ) com o fluxo do Sol visto da Terra ( $F_{Sol}$ ), da equação geral das magnitudes, temos:

$$m_2 - m_{sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_2}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow 4,08 + 26,72 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_2}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow F_2 = 4,786 \cdot 10^{-13} F_{Sol}$$

O fluxo solar visto da Terra é dado por:

$$F_{Sol} = \frac{L_{Sol}}{4\pi \cdot D_{T-S}^2} = \frac{3,826 \cdot 10^{26}}{4,314 \cdot (1,496 \cdot 10^{11})^2} \Rightarrow F_{Sol} = 13611 \frac{W}{m^2}$$

Logo:

$$F_2 = 4,786 \cdot 10^{-13} \cdot 13611 \Rightarrow F_2 = 6,514 \cdot 10^{-10} \frac{W}{m^2}$$

d) Da definição do fluxo, temos que a distância  $D$  até a estrela é:

$$F_2 = \frac{L_2}{4\pi \cdot D^2} \Rightarrow F_2 = \frac{4\pi R_2^2 \cdot \sigma \cdot T_2^4}{4\pi \cdot D^2} \Rightarrow D = R_2 \cdot T_2^2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{F_2}}$$

Aplicando a Lei de Wien ( $\lambda \cdot T = b$ ), temos:

$$D = R_2 \cdot \left(\frac{b}{\lambda_2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{F_2}} \Rightarrow D = 4,92 \cdot 10^{10} \cdot \left(\frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{649,1 \cdot 10^{-9}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{5,670 \cdot 10^{-8}}{6,514 \cdot 10^{-10}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 9,13 \cdot 10^{18} m \Rightarrow D = 296 pc$$

9) Da definição de velocidade de escape, o número  $n$  de estrela do aglomerado globular pode ser expresso por:

$$\begin{cases} v_{esp} = \sqrt{\frac{2gM_A}{R_A}} \Rightarrow n = \frac{v_{esp}^2 \cdot R_A}{2GM_{Sol}} \\ M_A = n \cdot M_{Sol} \end{cases}$$

Substituindo os dados, temos:

$$n = \frac{v_{esp}^2 \cdot R_A}{2GM_{Sol}} = \frac{(6 \cdot 10^3)^2 \cdot 20,308 \cdot 10^{16}}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9891 \cdot 10^{30}} \Rightarrow n \approx 8,4 \cdot 10^4$$

10) a) Considerando a situação inicial, ou seja, antes do acionamento dos motores, o perigeu  $r_p$  e o apogeu  $r_a$  da órbita tem valores:

$$r_p = R_{Terra} + h_p^i = 6371 + 264 \Rightarrow r_p = 6635 km$$

$$r_a = R_{Terra} + h_a^i = 6371 + 23904 \Rightarrow r_a = 30275 km$$

Aplicando a conservação da energia na situação em que o satélite se encontra no perigeu, sua velocidade  $v_p$  neste ponto pode ser expressa por:

$$E = K + U \Rightarrow -\frac{GM_{Terra} \cdot m}{2a} = \frac{m \cdot v_p^2}{2} - \frac{GM_{Terra} \cdot m}{r_p} \Rightarrow -\frac{GM_{Terra}}{r_p + r_a} = \frac{v_p^2}{2} - \frac{GM_{Terra}}{r_p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_p^2}{2} = \frac{GM_{Terra}}{r_p} - \frac{GM_{Terra}}{r_p + r_a} \Rightarrow v_p^2 = 2GM_{Terra} \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_p + r_a} \right) \Rightarrow v_p = \sqrt{2 \frac{GM_{Terra}}{r_p + r_a} \cdot \frac{r_a}{r_p}}$$

Substituindo os valores, temos que o valor de  $v_p$  é:

$$v_p = \sqrt{2 \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{6,635 \cdot 10^6 + 3,0275 \cdot 10^7} \cdot \frac{3,0275 \cdot 10^7}{6,635 \cdot 10^6}} \Rightarrow v_p \approx 9,929 \text{ km/s}$$

Acionando os motores, o satélite sofrerá um aumento de velocidade dado por:

$$\Delta v = \frac{I}{m} = \frac{1,73 \cdot 10^5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{(500 + 852) \text{ kg}} = 128 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sua nova velocidade no perigeu  $v_p'$  será:

$$\Delta v = v_p' - v_p \Rightarrow 128 = v_p' - 9929,2 \Rightarrow v_p' = 10,057 \text{ km/s}$$

O novo apogeu  $r_a'$  pode ser encontrado por:

$$v_p' = \sqrt{2 \frac{GM_{Terra}}{r_p + r_a'} \cdot \frac{r_a'}{r_p}} \Rightarrow 10057 = \sqrt{2 \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{6,635 \cdot 10^6 + r_a'} \cdot \frac{r_a'}{6,635 \cdot 10^6}} \Rightarrow r_a' = 35380 \text{ km}$$

Portanto, a altitude há do novo apogeu será:

$$r_a' = R_{Terra} + h_a^f \Rightarrow h_a^f = 35380 - 6371 \Rightarrow \boxed{h_a^f = 29009 \text{ km}}$$

b) O semieixo maior (a) nessa nova situação é dada por:

$$a = \frac{r_p + r_a'}{2} = \frac{6,635 \cdot 10^6 + 35,38 \cdot 10^6}{2} \Rightarrow a = 2,10 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Logo, a excentricidade (e) será:

$$r_p = a(1 - e) \Rightarrow 6,635 \cdot 10^6 = 2,10 \cdot 10^7 (1 - e) \Rightarrow \boxed{e = 0,684}$$

Da 3ª Lei de Kepler, considerando a massa do satélite muito menor que a massa da Terra, temos que o período orbital é:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_{Terra}}} = 2\pi \sqrt{\frac{(2,1 \cdot 10^7)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}} \Rightarrow P \approx 30280 \text{ s} \Rightarrow \boxed{P = 8,41 \text{ h}}$$

11) a) Aplicando a Lei de Wien, temos:

$$\lambda T = 2,898 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 651 \cdot 10^{-9} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \boxed{T = 4451,6 \text{ K}}$$

b) Da equação de Stefan-Boltzmann, temos:

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \Rightarrow 4,3 \cdot 14 \cdot (0,75 \cdot 6,9634 \cdot 10^8)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (4451,6)^4 \Rightarrow L = 7,6278 \cdot 10^{25} \text{ W} \\ \Rightarrow \boxed{L = 0,20 L_{Sol}}$$

c) A luminosidade do sistema durante o trânsito do planeta ( $L_T$ ) é dado por:

$$L_T = L - L_{planeta} \Rightarrow L_T = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 - 4\pi R_{planeta}^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \Rightarrow L_T = 4\pi (R^2 - R_{planeta}^2) \cdot \sigma \cdot T^4$$

A diferença de magnitudes observada é expressa por:

$$m - m_T = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L}{L_T}\right) \Rightarrow -2,1 \cdot 10^{-4} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - R_{planeta}^2}\right) \Rightarrow \frac{R^2}{R^2 - R_{planeta}^2} = 10^{8,4 \cdot 10^{-5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{planeta}^2 = R^2 \cdot (1 - 10^{-8,4 \cdot 10^{-5}}) \Rightarrow R_{planeta}^2 = (0,75696 \cdot 10^8)^2 \cdot (1 - 10^{-8,4 \cdot 10^{-5}}) \Rightarrow \boxed{R_{planeta} = 7260 \text{ km}}$$

d) Considerando a massa do planeta desprezível, uma vez que a órbita é circular, temos que a massa do sistema é:

$$M = \sqrt[3,5]{L} = \sqrt[3,5]{7,6278 \cdot 10^{25}} \Rightarrow M = \sqrt[3,5]{0,2 L_{Sol}} \Rightarrow M = 0,63 M_{Sol}$$

Aplicando a 3ª Lei de Kepler, vem:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot 0,63 M_{Sol}} \Rightarrow \frac{(0,561 \text{ ano})^2}{(a \text{ ua})^3} = \frac{1}{0,63} \Rightarrow \boxed{a = 0,583 \text{ ua}}$$

e) A potência recebida pelo planeta, de uma estrela de luminosidade  $L_{estrela}$  a distância  $d$ , é dada por:

$$\left| \begin{aligned} I &= \frac{P_R}{\pi R_p^2} \\ I &= (1-a) \cdot I_0 \Rightarrow P_R = I_0 \cdot (1-a) \cdot \pi R_p^2 \\ I_0 &= \frac{L_{estrela}}{4\pi \cdot d^2} \end{aligned} \right.$$

Onde  $I$  é a incidência luminosa e  $a$  é chamado o albedo. **Comentário:** Albedo (do latim *abus* "brancura") é o poder de reflexão de uma superfície. Pode ser obtido pela razão entre a radiação refletida pela radiação incidente.

Já a potência emitida pelo planeta é expressa por:

$$P_e = \varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$$

Onde  $\varepsilon$  é a emissividade que para um corpo negro tem valor 1.

No equilíbrio térmico,  $P_R = P_e$ , logo:

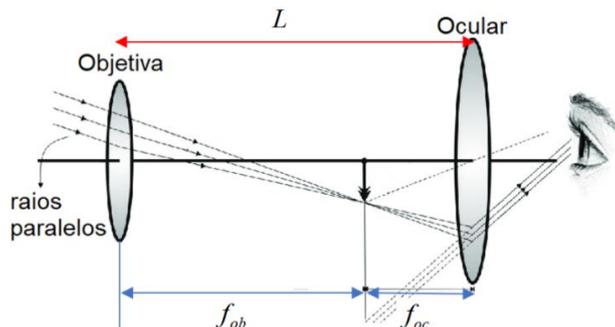
$$\varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 = I_0 \cdot (1-a) \cdot \pi R_p^2 \Rightarrow T_p^4 = \frac{L_{estrela} \cdot (1-a)}{16\pi \cdot d^2 \cdot \sigma}$$

$$T_p^4 = \frac{0,2 \cdot 3,826 \cdot 10^{26} \cdot (1-0,36)}{16\pi \cdot (0,583 \cdot 1,496 \cdot 10^{11})^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} \Rightarrow \boxed{T_p = 218 \text{ K}}$$

12) a) Da definição de aumento ou magnificação, temos:

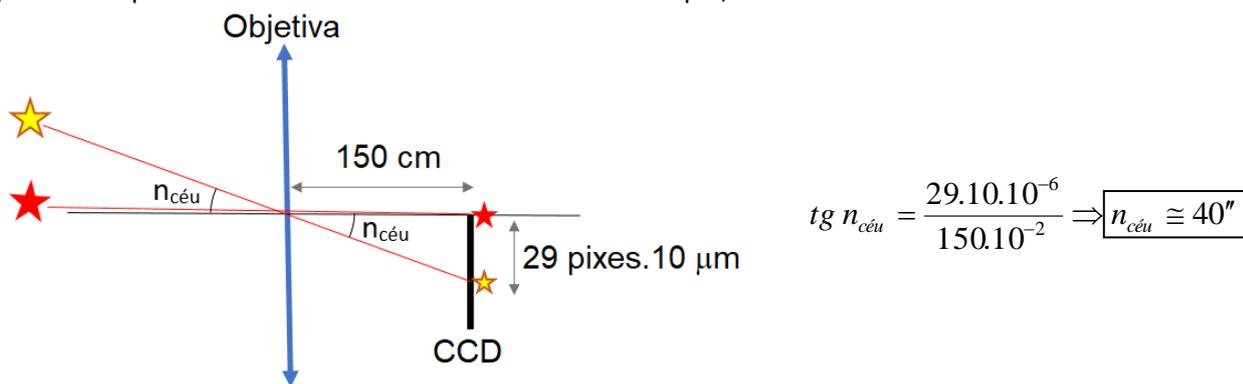
$$A = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} \Rightarrow 150 = \frac{f_{ob}}{1} \Rightarrow \boxed{f_{ob} = 150 \text{ cm}}$$

b) O comprimento  $L$  é dado por:



$$L = f_{ob} + f_{oc} = 1 + 150 \Rightarrow \boxed{L = 151 \text{ cm}}$$

c) Sabendo que as estrelas estão bem afastadas do telescópio, vale:



13) a) Da definição do índice de cor apresentado pelo enunciado, para a 1ª estrela, livre de gás e poeira, temos:

$$(V - R) = m_V - m_R = 8,72 - 9,16 = \boxed{-0,44}$$

Para a 2ª estrela, devemos calcular as novas magnitudes  $m'_V$  e  $m'_R$  levando em consideração a absorção do gás e poeira do meio que ocasiona redução do fluxo luminoso. Comparando os dados da 2ª estrela com os da 1ª estrela (idênticas), da equação geral das magnitudes, temos:

$$m'_V - m_V = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_2}{F_1}\right) \Rightarrow m'_V - 8,72 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{0,68 \cdot F_1}{F_1}\right) \Rightarrow m'_V = 9,14$$

$$m'_R - m_R = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_2}{F_1}\right) \Rightarrow m'_R - 9,16 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{0,91 \cdot F_1}{F_1}\right) \Rightarrow m'_R = 9,26$$

Portanto, o índice de cor da 2ª estrela será:

$$(V' - R') = m'_V - m'_R = 9,14 - 9,26 = \boxed{-0,12}$$

b) Como o índice de cor da 2ª estrela é maior do que o da 1ª estrela (menos negativo) ela parecerá mais **vermelha** do que a primeira.

*Comentário:* O índice de cor negativo indica que as duas estrelas são azuladas.

14) a) A partir da energia cinética do gás, temos:

$$\frac{m \cdot v_{rms}^2}{2} = \frac{5}{2} k_b T \Rightarrow v_{rms} = \sqrt{\frac{5k_b T}{m}}$$

Logo, a expressão para a massa mínima de gás diatômico ( $m$ ) tal que não escape da atração de um corpo celeste será:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{rms} = \frac{1}{6} v_{esp} \\ v_{rms} = \sqrt{\frac{5k_b T}{m}} \Rightarrow \sqrt{\frac{5k_b T}{m}} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow m = \frac{90k_b TR}{GM} \\ v_{esp} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{array} \right.$$

Portanto, o peso atômico  $A_{\text{mín}}$  será:

$$A_{\text{mín}} = \frac{m}{\text{uma}} \Rightarrow \boxed{A_{\text{mín}} = \frac{90k_b TR}{\text{uma } GM}}$$

b) Utilizando os dados de Plutão encontrados na tabela, temos:

$$A_{\min} = \frac{90k_b TR}{uma GM} = \frac{90.1,38.10^{-23}.49,1,18.10^6}{1,66.10^{-27}.6,67.10^{-11}.1,3.10^{22}} \Rightarrow A_{\min} \approx 50uma$$

c) O peso atômico do oxigênio e do nitrogênio valem respectivamente:

$$A_{O_2} = 2.16uma = 32uma$$

$$A_{N_2} = 2.14uma = 28uma$$

Como o  $A_{\min}$  é maior que  $A_{O_2}$  e do  $A_{N_2}$ , nenhum dos gases será retido pela atmosfera de Plutão.

15) a) Considerando o sistema conservativo, para o ponto N, temos:

$$E_T = K + U \Rightarrow -\frac{Gmm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow -\frac{Gmm}{2a} = \frac{m}{2} \cdot \frac{GM}{R_T} - \frac{GMm}{R_T} \Rightarrow a = R_T \Rightarrow a = 6371km$$

b) Sendo o ponto D o centro da elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ , e também o centro do quadrado  $NF_1CF_2$  de lado  $R_T$ , vem:

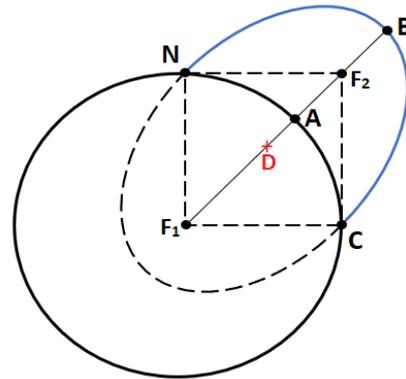
Note:

$$F_1F_2 = R_T \cdot \sqrt{2}$$

$$F_1A = R_T$$

$$DF_2 = \frac{R_T \sqrt{2}}{2}$$

$$DB = a = R_T$$



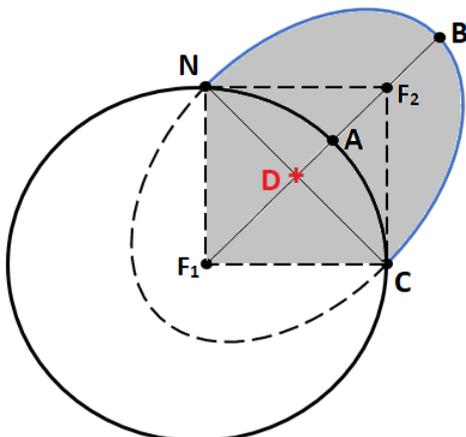
Da geometria do sistema, a distância AD é dada por:

$$F_1A - AD + DF_2 = F_1F_2 \Rightarrow R_T - AD + \frac{R_T \sqrt{2}}{2} = R_T \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R_T$$

Logo, a distância AB, que equivale a altura máxima h, será dada por:

$$AD + AB = DB \Rightarrow \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R_T + h = R_T \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} R_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6371 \Rightarrow h = 4505km$$

c) Lembrando que a área da elipse é dada por  $S = \pi \cdot a \cdot b$ , onde b é o semieixo menor; a área A da figura sombreada é:



$$A = \frac{\pi a \cdot b}{2} + \frac{R_T^2}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi \cdot R_T \cdot R_T \sqrt{2}}{2} + \frac{R_T^2}{2} \Rightarrow A = \frac{(\pi \sqrt{2} + 2)}{4} \cdot R_T^2$$

Aplicando a 3ª Lei de Kepler e considerando a gravidade  $g$  constante durante o voo, temos que o período orbital  $P$  da órbita é:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \\ g = \frac{GM_T}{R_T^2} \end{array} \Rightarrow \frac{P^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{g \cdot R_T^2} \Rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \right.$$

Portanto, da 2ª Lei de Kepler, temos que o tempo de voo será:

$$\begin{aligned} \frac{A_{Total}}{P} = \frac{A}{t} \Rightarrow \frac{\pi ab}{P} = \frac{A}{t} \Rightarrow t = \frac{AP}{\pi ab} \Rightarrow t = \frac{(\pi\sqrt{2}+2)}{4} \cdot R_T^2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \cdot \frac{2}{\pi \cdot R_T \cdot R_T \sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{R_T}{g}} \Rightarrow \\ \Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{637110^3}{9,8}} \Rightarrow \boxed{t = 3672 \text{ s} \approx 1,02 \text{ h}} \end{aligned}$$

**16) a)** Para este problema, não levamos em consideração as reações de nucleossíntese que a priori formaria o isótopo ferro-56. De maneira simplificada, podemos estimar a quantidade de partículas necessárias (tanto de  ${}^1_1\text{H}$  quanto de  ${}^4_2\text{He}$ ) para produzir  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  e, conseqüentemente, a energia de ligação ( $E_H$  e  $E_{He}$ ) para cada caso. No caso do He, vamos considerar a diferença de energia, levando em consideração que é necessário quebrar o átomo de He, para depois usar os núcleos para formar o átomo de hélio.

$$\left| \begin{array}{l} 56 \text{ } {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe} \\ 14 \text{ } {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe} \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} E_H = 56 \times 8,8 \\ E_{He} = (56 \times 8,8) - (14 \times 4 \times 7,1) \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} E_H = 492,8 \text{ MeV} \\ E_{He} = 95,2 \text{ MeV} \end{array} \right.$$

Para determinar a quantidade de Ferro a ser produzida, calcula-se a densidade numérica do hidrogênio e hélio ( $n_H$  e  $n_{He}$ , respectivamente) usando a distribuição de massa na matéria bariônica.

$$\left| \begin{array}{l} n_H = \frac{0,75\rho_b}{m_H} = \frac{0,75 \times 4,2 \times 10^{-31} (\times 10^3 \text{ kg/m}^3)}{1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}} \\ n_{He} = \frac{0,25\rho_b}{m_{He}} = \frac{0,25 \times 4,2 \times 10^{-31} (\times 10^3 \text{ kg/m}^3)}{4 \times 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} n_H = 0,190 \text{ m}^{-3} \\ n_{He} = 1,58 \times 10^{-2} \text{ m}^{-3} \end{array} \right.$$

Desta maneira, a densidade de energia produzida neste processo será

$$u = \frac{492,8 \text{ MeV} \times n_H}{56} + \frac{95,2 \text{ MeV} \times n_{He}}{14} \Rightarrow u = 1,78 \text{ MeV m}^{-3} = 2,85 \times 10^{-13} \text{ J/m}^3$$

Da lei de Stefan-Boltzmann para densidade de energia,

$$u = aT^4 = \frac{4}{c} \sigma T^4 \Rightarrow T^4 = \frac{2,85 \times 10^{-13} \times 3 \times 10^8}{4 \times 5,67 \times 10^{-8}} \therefore \boxed{T \approx 4,40 \text{ K}}$$

b) Da lei do deslocamento de Wien,

$$\lambda_{m\acute{a}x} T = b \Rightarrow \lambda_{m\acute{a}x} = \frac{2,9 \times 10^{-3}}{4,40} \therefore \boxed{\lambda_{m\acute{a}x} = 6,59 \times 10^{-4} \text{ m} = 659 \text{ } \mu\text{m}}$$

Desta forma, o pico de emissão desta radiação se encontra na faixa de micro-ondas (ou banda submilimétrica).

c) O tempo é determinado dividindo a densidade de energia ( $u$ ) pela taxa de fusão, isto é, a luminosidade produzida pelas estrelas (apresentado no exercício).

$$t = \frac{u}{L} = \frac{2,85 \times 10^{-13} \text{ J/m}^3}{3 \times 10^8 L_{\odot}/\text{Mpc}^3} = \frac{2,85 \times 10^{-13}}{3 \times 10^8 \times \frac{3,83 \times 10^{26}}{(3,09 \times 10^{16} \times 10^6)^3}} \therefore \boxed{t = 7,32 \times 10^{19} \text{ s} \approx 2,32 \times 10^{12} \text{ anos}}$$

OBS: Este tempo é  muito maior  que a idade estimada para o Universo atualmente ( $\approx 13,8 \times 10^9 \text{ anos}$ ).

**17)** Inicialmente, é necessário encontrar a magnitude aparente de Betelgeuse caso ela estivesse no centro do Sistema Solar. Da correção bolométrica, temos que

$$BC = M_{bol} - M_V = m_{bol} - m_V \Rightarrow m_{bol} = -1,8 + 0,5 \therefore m_{bol} = -1,3$$

Pelo módulo de distância, é possível comparar as magnitudes bolométricas de Betelgeuse na distância real (220 pc) e a distância de 1 ua. ( $a$ ). Portanto, podemos fazer a seguinte comparação

$$\begin{cases} m_{bol} - M_{bol} = 5 \log D - 5 \\ m'_{bol} - M_{bol} = 5 \log a - 5 \end{cases} \Rightarrow m'_{bol} = m_{bol} - 5 \log \left( \frac{D}{a} \right) = -1,3 - 5 \cdot \log \left( \frac{220 \times 3,086 \times 10^{16}}{1,496 \times 10^{11}} \right)$$

$$\therefore m'_{bol} = -39,6$$

Comparando com a magnitude aparente do Sol ( $m_{\odot}$ ), temos que

$$m'_{bol} - m_{bol, \odot} = -2,5 \cdot \log \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right) \Rightarrow \frac{L}{L_{\odot}} = 10^{\frac{-39,6 - (-26,72)}{-2,5}} \Rightarrow L \approx 1,445 \times 10^5 \therefore L = 5,53 \times 10^{31} \text{ W}$$

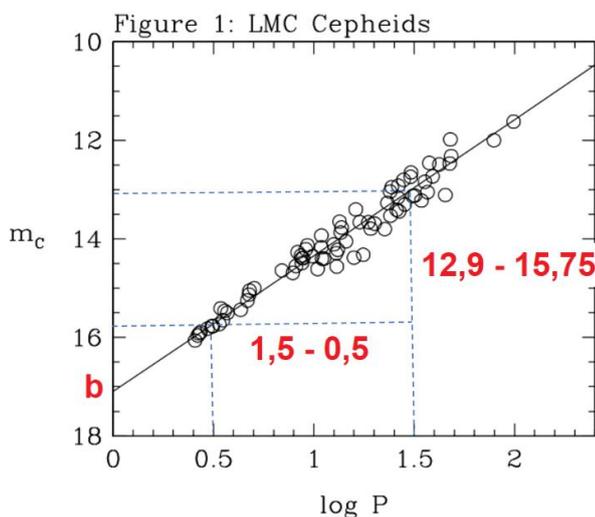
Numa condição de equilíbrio térmico, consideramos que a Terra irradia para o espaço ( $P_{out}$ ) a mesma quantidade de energia que ela recebe do Sol em sua superfície ( $P_{in}$ ), ou seja:  $P_{in} = P_{out}$ .

Considerando que a seção de área que a Terra recebe calor irradiado pelo Sol seja descrito por  $S = \pi R_{\oplus}^2$ , sendo  $R_{\oplus}$  o raio terrestre. Desta forma, temos que

$$\begin{cases} P_{in} = \frac{L \pi R_{\oplus}^2}{4 \pi a^2} = \frac{L R_{\oplus}^2}{4 a^2} \\ P_{out} = 4 \pi R_{\oplus}^2 \sigma T^4 \end{cases} \Rightarrow \frac{L R_{\oplus}^2}{4 a^2} = 4 \pi R_{\oplus}^2 \sigma T^4 \Rightarrow T^4 = \frac{5,53 \times 10^{31}}{16 \times (1,496 \times 10^{11})^2 \times \pi \times 5,67 \times 10^{-8}}$$

$$\therefore \boxed{T \approx 5430 \text{ K}}$$

**18) a)** A partir do gráfico, da figura 1, temos:



Para  $b_{LMC}$ :

$$\boxed{b = 17}$$

Para  $a$ :

$$a = \text{tg} \theta = \frac{12,9 - 15,75}{1,5 - 0,5} \Rightarrow \boxed{a = -2,85}$$

b) Como o  $a$  é o coeficiente angular da reta, seu valor permanecerá constante, ou seja,  $a = -2,85$ .

Da figura 1 temos que para  $\log P = 1$ ,  $m_c = 14,3$ . Aplicando a equação de Pogson nesta situação, temos que a magnitude absoluta  $M_C$  da estrela é:

$$m_c - M_C = 5 \log d - 5 \Rightarrow 14,3 - M_C = 5 \log 50 \cdot 10^3 - 5 \Rightarrow M_C = -4,19$$

Portanto, valor de  $M_0$  será:

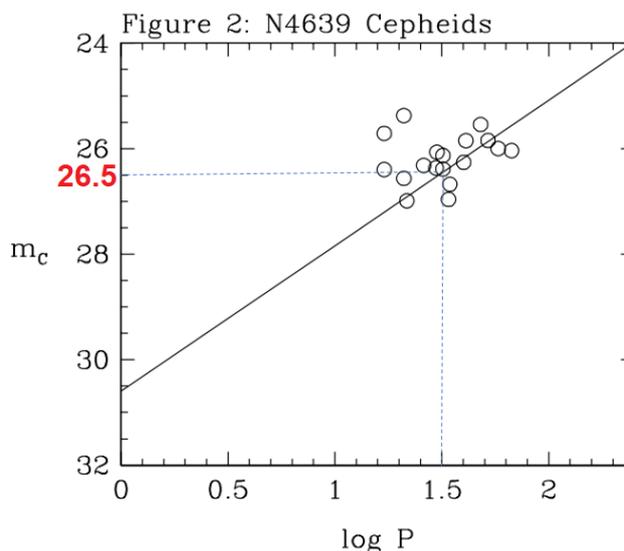
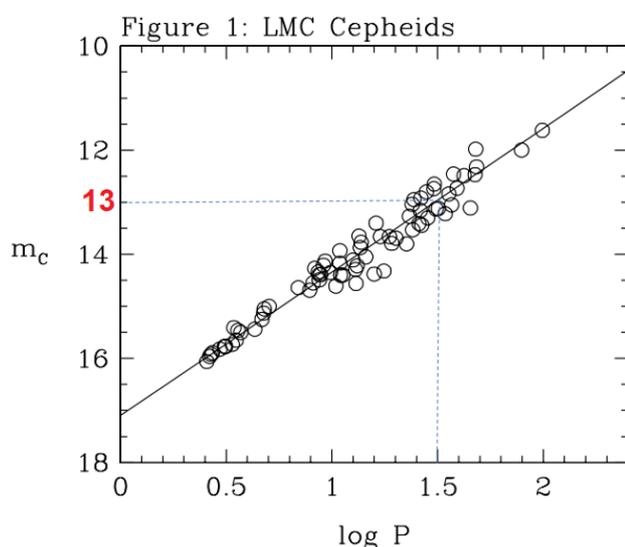
$$M_C = a \log P + M_0 \Rightarrow -4,19 = -2,85 \cdot 1 + M_0 \Rightarrow M_0 = -1,34$$

c) Considerando  $M_C = M_0$ , temos:

$$M_C = a \log P + M_0 \Rightarrow M_0 = a \cdot \log P + M_0 \Rightarrow \log P = 0 \Rightarrow P = 1 \text{ dia}$$

d) Analisando a figura 2, temos que o coeficiente linear  $b_{\text{NGC}}$  tem valor **30,5**.

e) Comparando estrelas Cefeidas de mesmo período, luminosidades iguais, em LMC e NGC4639, da equação geral das magnitudes, temos:



$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{F_1}{F_2} \right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \log \left( \frac{L}{4\pi d_1^2} \cdot \frac{4\pi d_2^2}{L} \right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -5 \log \left( \frac{d_2}{d_1} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 - 26,5 = -5 \log \left( \frac{d_2}{50 \cdot 10^3} \right) \Rightarrow d_2 = 25 \text{ Mpc}$$

f) Da equação de Pogson, vem:

$$m_{\text{SN}} - M_{\text{SN}} = 5 \log d - 5 \Rightarrow 12,61 - M_{\text{SN}} = 5 \log 25 \cdot 10^6 - 5 \Rightarrow M_{\text{SN}} = -19,38$$

**19)** Inicialmente, devemos encontrar a velocidade de rotação da Via Láctea nas bordas do disco. Assim, obtemos.

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \times \pi \times 52\,850 \times 9,461 \times 10^{12}}{225 \times 10^6 \times 3,156 \times 10^7} \therefore v = 442,4 \text{ km/s}$$

Como Andrômeda se localiza a  $21,3^\circ$  do disco da Via Láctea, o alienígena observará apenas a componente radial deste movimento em relação à sua linha de visada. Desta forma:

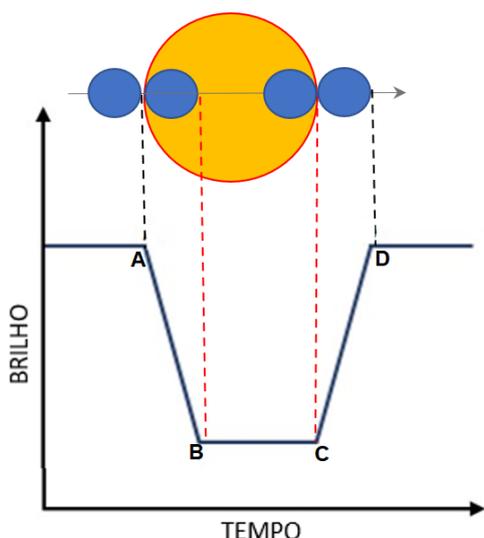
$$v_R = v \cdot \cos b = 442,4 \times \cos 21,3^\circ \therefore v_R = 412,2 \text{ km/s}$$

Como a Via Láctea está em movimento em relação ao observador, devemos levar em conta a extremidade que avança no sentido do alien ( $v_R$ ) e a extremidade que se distancia ( $-v_R$ ). Desta forma.

$$\begin{cases} v_{\text{Blue}} = v + v_R \\ v_{\text{Red}} = v - v_R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{\text{Blue}} = -110 - 412,2 = -522,2 \text{ km/s} \\ v_{\text{Red}} = -110 + 412,2 = +302,2 \text{ km/s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{\text{Blue}} = \frac{v_{\text{Blue}}}{c} = -\frac{522,4}{2,998 \times 10^5} \\ z_{\text{Red}} = \frac{v_{\text{Red}}}{c} = +\frac{332,4}{2,998 \times 10^5} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} z_{\text{Blue}} = -1,742 \times 10^{-3} \\ z_{\text{Red}} = +1,008 \times 10^{-3} \end{cases}$$

20) a) Sendo  $R$  o raio de TRAPPIST-1 e  $r$  o raio de TRAPPIST-1g, considerando que a velocidade tangencial de TRAPPIST-1g é constante e seu plano orbital é paralelo a linha de visada, temos:



$$\begin{cases} d_{AD} = v \cdot t_{AD} \\ d_{BC} = v \cdot t_{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(R+r) = v \cdot t_{AD} \\ 2(R-r) = v \cdot t_{BC} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{v \cdot (t_{AD} + t_{BC})}{4} \text{ e } r = \frac{v \cdot (t_{AD} - t_{BC})}{4}$$

Logo:

$$R = \frac{4,15 \cdot 10^4 (1,19 + 0,99) \cdot 3600}{4} \Rightarrow R = 8,142 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$r = \frac{4,15 \cdot 10^4 (1,19 - 0,99) \cdot 3600}{4} \Rightarrow r = 7,470 \cdot 10^6 \text{ m}$$

b) Da equação geral das magnitudes, temos que o fluxo  $F_1$  de TRAPPIST-1 é:

$$m_1 - m_{\text{Sol}} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_{\text{Sol}}}\right) \Rightarrow 13,43 - (-26,72) = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{1366}\right) \Rightarrow F_1 = 1,18 \cdot 10^{-13} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Sabendo que TRAPPIST-1 está a  $d = 12 \text{ pc}$ , da definição de fluxo e da equação de Stefan-Boltzmann, vem:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{L}{4\pi d^2} \\ L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \Rightarrow F_1 = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{d^2} \Rightarrow 1,18 \cdot 10^{-13} = \frac{(8,142 \cdot 10^7)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4}{(12,3086 \cdot 10^{16})^2} \Rightarrow T = 2560 \text{ K}$$

c) Considerando a situação de magnitude  $m_1$ , TRAPPIST-1 não eclipsada nenhum planeta; e situação de magnitude  $m_2$ , TRAPPIST-1 eclipsada por um planeta de raio  $r$ ; como o sistema está sempre a mesma distância  $d$  da Terra, da equação geral das magnitudes, vem:



$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_1}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 - 4\pi r^2 \cdot \sigma \cdot T^4}\right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow m_2 = m_1 + 2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right)$$

d) Utilizando os dados do exoplaneta TRAPPIST-1e, temos que a massa de TRAPPIST-1 é:

$$M_{TRAPPIST-1} = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot P^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (0,0281,5 \cdot 10^{11})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (6,09 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \Rightarrow M_{TRAPPIST-1} = 1,58 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

Aplicando a 3ª Lei de Kepler  $\left(\frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{P_2^2}{a_2^3}\right)$ , vem:

Planeta	Período (dias)	Raio orbital (ua)
1b	1,51	0,011
1c	2,38	0,015
1d	4,04	0,021
1e	6,09	0,028
1f	9,20	0,037
1g	12,35	0,045
1h	18,60	0,059

e) A potência recebida ( $P_R$ ) por um exoplaneta, de TRAPPIST-1 de luminosidade  $L_{estrela}$ , a distância  $d$ , é dada por:

$$\begin{cases} I = \frac{P_R}{\pi R_p^2} \\ I = (1-a) \cdot I_0 \Rightarrow P_R = I_0 \cdot (1-a) \cdot \pi R_p^2 \\ I_0 = \frac{L_{estrela}}{4\pi \cdot d^2} \end{cases}$$

Onde  $I$  é a incidência luminosa e  $a$  é chamado o albedo. **Comentário:** Albedo (do latim *abus* "brancura") é o poder de reflexão de uma superfície. Pode ser obtido pela razão entre a radiação refletida pela radiação incidente. Já a potência emitida ( $P_E$ ) pelo exoplaneta é expressa por:

$$P_E = \varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$$

Onde  $\varepsilon$  é a emissividade que para um corpo negro tem valor 1.

No equilíbrio térmico,  $P_R = P_E$ , logo:

$$\begin{aligned} \varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 &= I_0 \cdot (1-a) \cdot \pi R_p^2 \Rightarrow 4 \cdot \sigma T_p^4 = \frac{L_{estrela}}{4\pi \cdot d^2} \cdot (1-a) \Rightarrow 4 \cdot \sigma T_p^4 = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot d^2} \cdot (1-a) \\ d &= \sqrt{\frac{R^2 \cdot T^4 \cdot (1-a)}{4 \cdot T_p^4}} = \frac{R \cdot T^2 \cdot \sqrt{1-a}}{2 \cdot T_p^2} \Rightarrow d = \left(\frac{T}{T_p}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2} \end{aligned}$$

Para encontrar os limites da zona habitável devemos ter um planeta cuja temperatura permita a presença de água no estado líquido, então  $273K \leq T_p \leq 373K$ . Sabendo que a temperatura de TRAPPIST-1 é  $T = 2560K$ , temos:

$$\begin{aligned} d_{\min} &= \left(\frac{T}{T_{P_{\max}}}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2} = \left(\frac{2560}{373}\right)^2 \cdot \frac{8,142 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{1-0,1}}{2} \Rightarrow d_{\min} = 1,819 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,012 \text{ ua} \\ d_{\max} &= \left(\frac{T}{T_{P_{\min}}}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1-a}}{2} = \left(\frac{2560}{273}\right)^2 \cdot \frac{8,142 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{1-0,1}}{2} \Rightarrow d_{\max} = 3,396 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,023 \text{ ua} \end{aligned}$$

Portanto, os exoplanetas dentro da zona habitável são TRAPPIST- 1c e TRAPPIST- 1d.

f) Considerando que no primeiro trecho da viagem a micro nave se desloca com aceleração constante (MRUV) e no segundo trecho permanece com velocidade constante (MRU), temos:

- Trecho 1:

$$v = v_0 + a.t_1 \Rightarrow 0,2.c = 35.t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{0,2c}{35} = 1,714.10^6 \text{ s}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.d_1 \Rightarrow (0,2.c)^2 = 2.35.d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{4.10^{-2}.c^2}{70} = 5,142.10^{13} \text{ m}$$

- Trecho 2:

$$d_2 = v.t_2 \Rightarrow 12,3,086.10^{16} - d_1 = 0,2c.t_2 \Rightarrow t_2 = 6,159.10^9 \text{ s}$$

Logo, o tempo total da viagem é:

$$t = t_1 + t_2 = 1,714.10^6 + 6,159.10^9 \approx 195,4 \text{ anos}$$

21) a) Considerando o corpo humano esférico, seu raio  $r$  pode ser expresso como:

$$\begin{cases} V = \frac{4}{3}\pi.r^3 \\ \rho = \frac{m}{V} \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$$

Considerando o corpo humano um corpo negro ideal  $\varepsilon=1$ , da Lei de *Stefan-Boltzmann*, temos que a potência absorvida é:

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon.A.\sigma.T^4 \Rightarrow P = \varepsilon.4\pi.r^2.\sigma.T^4 \Rightarrow P = \varepsilon.4\pi.\left(\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}\right)^2.\sigma.T^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P = 1.4\pi.\left(\sqrt[3]{\frac{3.60}{4\pi.10^3}}\right)^2.5,67.10^{-8}.(2,728)^4 \Rightarrow P = 2,319.10^{-6} \text{ W} \end{aligned}$$

b) A energia média de um fóton da CMB é dada por:

$$\varepsilon = 3k_B T \Rightarrow 3.1,381.10^{-23}.2,728 \Rightarrow \varepsilon = 1,13.10^{-22} \text{ J}$$

Portanto, o número de fótons  $n$  que o corpo humano absorve em 1 s é:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{n.\varepsilon}{\Delta t} \Rightarrow 2,319.10^{-6} = \frac{n.1,13.10^{-22}}{1} \Rightarrow n = 2,05.10^{16}$$

c) Da definição de potência, temos:

$$\begin{cases} P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \\ \Delta E = m.c.\Delta T \end{cases} \Rightarrow P = \frac{m.c.\Delta T}{\Delta t} \Rightarrow 2,319.10^{-6} = \frac{60.4200.1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 1,1.10^{11} \text{ s} \approx 3445 \text{ anos}$$

22) a) Considerando que nas situações analisadas o fluxo luminoso incidente no espelho primário tenha valor  $F_0$ , após sofrer duas reflexões em espelhos de refletividade  $\varepsilon_1 = 91\%$ , fluxo luminoso  $F_1$  refletido no espelho secundário:

$$F_1 = 91\% \cdot 91\% \cdot F_0 \Rightarrow F_1 = 82,81\% F_0$$

Substituindo os dois espelhos por outros de refletividade *premium*  $\varepsilon_2 = 98\%$ , o novo fluxo  $F_2$  refletido no espelho secundário será:

$$F_2 = 98\% \cdot 98\% \cdot F_0 \Rightarrow F_2 = 96,04\% F_0$$

Logo, da equação geral das magnitudes, temos que a mudança na magnitude limite do telescópio é:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{82,81\% F_0}{96,04\% F_0}\right) \Rightarrow \boxed{m_1 - m_2 = 0,161}$$

b) Com o acréscimo do espelho diagonal, teremos três reflexões no telescópio. Nesta configuração, considerando que todos os espelhos do telescópio original são revestidos por alumínio de refletividade  $\varepsilon_1 = 91\%$ , fluxo luminoso  $F_1$  refletido pelo espelho diagonal é:

$$F_1' = 91\% \cdot 91\% \cdot 91\% \cdot F_0 \Rightarrow F_1' = 75,357\% F_0$$

Substituindo os espelhos primário e secundário por revestimentos de refletividade *premium*  $\varepsilon_2 = 98\%$  e o espelho diagonal por um espelho dielétrico  $\varepsilon_3 = 99\%$ , o novo fluxo  $F_2'$  refletido pelo espelho diagonal será:

$$F_2' = 98\% \cdot 98\% \cdot 99\% \cdot F_0 \Rightarrow F_2' = 95,080\% F_0$$

Portanto, da equação geral das magnitudes, temos que a mudança na magnitude limite do telescópio foi:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1'}{F_2'}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{75,357\% F_0}{95,080\% F_0}\right) \Rightarrow \boxed{m_1 - m_2 = 0,252}$$

c) Lembrando que o brilho aparente está relacionado com o conceito de fluxo luminoso, da relação entre os fluxos  $\frac{F_2}{F_1}$  e  $\frac{F_2'}{F_1'}$ , temos:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{96,04\% F_0}{82,81\% F_0} \Rightarrow F_2 = 116\% F_1 \quad \text{e} \quad \frac{F_2'}{F_1'} = \frac{95,080\% F_0}{75,357\% F_0} \Rightarrow F_2' = 126\% F_1'$$

Logo, as trocas produzem, respectivamente, um aumento de 16% e 26% no brilho aparente. O que torna as mudanças **sim** perceptíveis a olho nu.

23) a) Densidade numérica  $n$ , corresponde ao número de objetos  $N$  especificados por unidade de volume  $V$ , logo:

$$n = \frac{N}{V} \Rightarrow N = n \cdot V$$

- Para  $r < R_b$ , a massa do sistema  $M(r)$  varia com a distância  $r$ , de tal forma que:

$$\begin{cases} M(r) = N \cdot m \\ N = n \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \end{cases} \Rightarrow M(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot n \cdot m \cdot r^3$$

Considerando que as estrelas de massa  $m$  estão em órbitas circulares no interior do bojo galáctico, vem:

$$\begin{cases}
 F_G(r) = R_{CP} \\
 F_G(r) = \frac{GM(r).m}{r^2} \Rightarrow \frac{GM(r).m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi n.m.r^3.m = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = r \sqrt{\frac{4\pi Gnm}{3}} \\
 R_{CP} = \frac{mv^2}{r}
 \end{cases}$$

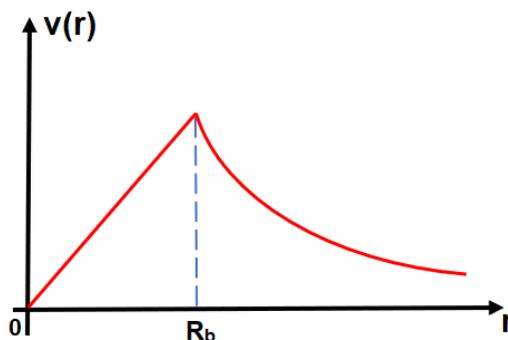
- Para  $r \geq R_b$ , a massa total  $M_T$  do sistema se mantém constante, uma vez que se deve desprezar as estrelas do halo, então:

$$\begin{cases}
 M_T = N.m \\
 N = n \cdot \frac{4}{3} \pi R_b^3 \Rightarrow M_T = \frac{4}{3} \pi n.m.R_b^3
 \end{cases}$$

Considerando que as estrelas de massa  $m$  estão em órbitas circulares no interior do bojo galáctico, vem:

$$\begin{cases}
 F_G = R_{CP} \\
 F_G = \frac{GM_T.m}{r^2} \Rightarrow \frac{GM_T.m}{r^2} = \frac{mv'^2}{r} \Rightarrow \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi n.m.R_b^3.m = \frac{mv'^2}{r} \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{4\pi GnmR_b^3}{3r}} \\
 R_{CP} = \frac{mv'^2}{r}
 \end{cases}$$

b) Sabendo que  $G$ ,  $n$ ,  $m$  e  $R_b$ , são constantes, para  $r < R_b$  temos  $v \propto r$ ; e para  $r \geq R_b$  vale  $v' \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ , logo:

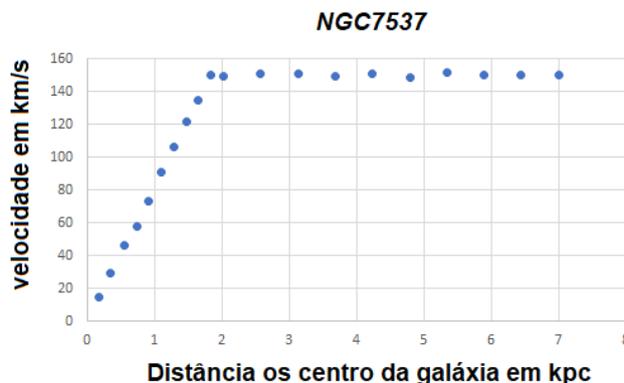


c) Seja  $N$  o número de estrelas da galáxia NGC7537, então como as estrelas são semelhantes ao Sol, a luminosidade da galáxia será  $N.L_{Sol}$ . Da equação fundamental das magnitudes, vem:

$$\begin{aligned}
 m - m_{Sol} &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow m - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{N.L_{Sol}}{4\pi D^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow m - m_{Sol} = -2,5 \log\left(N \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2\right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 15,7 - (-26,72) = -2,5 \log\left(N \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 10^{11}}{38 \cdot 10^6 \cdot 3,086 \cdot 10^{16}}\right)^2\right) \Rightarrow N = 6,5 \cdot 10^8 \text{ estrelas}
 \end{aligned}$$

d) A distância  $x$  das estrelas em relação ao centro da galáxia NGC7537 é dada por:  $x = 38.10^6.tg(\theta/2)$ , onde  $\theta$  é o diâmetro angular de suas órbitas. Com os dados da Tabela 1, vem:

Diâmetro angular (")	V (km/s)	Distância (kpc)
2	14,32	0,184
4	29,48	0,349
6	46,06	0,553
8	58,04	0,737
10	73,5	0,921
12	91,1	1,105
14	106,76	1,289
16	121,48	1,474
18	134,86	1,658
20	150,14	1,842
22	149,72	2,026
28	150,72	2,579
34	151,14	3,132
40	149,2	3,684
46	151,22	4,237
52	148,62	4,790
58	151,68	5,343
64	150,28	5,895
70	150,28	6,448
76	150,62	7,000



e) Analisando o gráfico temos que a velocidade das estrelas aumenta linearmente com a distância ao centro da galáxia até uma distância  $R_b$ , e a partir deste ponto se mantém constante, logo:

- Para  $r < R_b$ :

$$v = 82,27.r$$

- Para  $r \geq R_b$ :

$$v' = 150,07 \text{ km/s}$$

f) Do gráfico do item (d), temos que o raio do bojo é da ordem de  $R_b \approx 1,842$  kpc. Considerando que as estrelas de massa  $m$  estão em órbitas circulares no interior do bojo, pode-se estimar a massa do bojo de NGC7537 é:

$$\begin{aligned}
 F_G &= R_{CP} \\
 F_G &= \frac{GM'_T.m}{R_b^2} \Rightarrow \frac{GM'_T.m}{R_b^2} = \frac{mv'^2}{R_b} \Rightarrow M'_T = \frac{v'^2.R_b}{G} = \frac{(150,07.10^3)^2.(1,842.10^3.3,086.10^{16})}{6,67.10^{-11}} \Rightarrow \\
 R_{CP} &= \frac{mv'^2}{R_b} \\
 \Rightarrow M'_T &= 1,919.10^{40} \text{ kg} \Rightarrow M'_T = 9,65.10^9 M_{Sol}
 \end{aligned}$$

g) Para  $r > R_b$ , temos que a quantidade de matéria em função da distância é dada por:

$$v(r) = \sqrt{\frac{G.M(r)}{r}} \Rightarrow M(r) = \frac{r.v(r)^2}{G}$$

Do perfil de densidade esférica da matéria escura, a quantidade de matéria em função da distância deve ser comportar como:

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha$$

Logo, para  $r > R_b$ , a velocidade em função da distância pode ser escrita como:

$$\frac{r \cdot v(r)^2}{G} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha$$

Se desejamos obtermos um gráfico como no item **(d)**, em que a velocidade independente da distância, a partir de uma análise dimensional da equação anterior, temos que o expoente  $\alpha$  deve valer:

$$1 = 3 + \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

h) Se  $a \ll a_0 \Rightarrow \frac{a}{a_0} \ll 1$ ; logo  $\mu = \frac{a}{a_0}$ . Reescrevendo a segunda Lei de Newton, temos que a velocidade de rotação das estrelas no halo galáctico é dada por:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \cdot \frac{a}{a_0} \\ a = \frac{v^2}{r} \\ F_G = \frac{GM_T \cdot m}{r^2} \\ F = F_G \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{GM_T \cdot m}{r^2} = \frac{m}{a_0} \cdot \left( \frac{v^2}{r} \right)^2 \Rightarrow v = \sqrt[4]{GM_T a_0}$$

Como  $G$ ,  $M_T$  e  $a_0$  são constantes, a velocidade de rotação das estrelas no halo galáctico também será constante.

**24)** Antes de tudo, devemos saber a energia de repouso ( $E_0$ ) de um próton. Desta forma, podemos determinar sua velocidade ao sair da fotosfera.

$$E_0 = m_p c^2$$

A energia pode ser determinada através de dois passos:

- Obtendo a massa do próton ( $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg), calculando assim sua energia de repouso e, conseqüentemente, converter para MeV ( $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19}$  J), obtendo assim um valor de 939,37 MeV;
- Obtendo o valor direto da massa de repouso do próton, em  $\text{MeV}/c^2$  ( $\approx 938 \text{ MeV}/c^2$ ).

Os próximos passos a seguir serão feitos com o primeiro passo.

Do conceito de energia cinética relativística e energia de repouso, obtemos o fator de Lorentz ( $\gamma$ )

$$\gamma - 1 = \frac{K}{E_0} \Rightarrow \gamma = \frac{1000 \text{ MeV}}{939 \text{ MeV}} + 1 \Rightarrow \gamma = 2,06 \Rightarrow 2,06 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \therefore v \approx 0,875 c$$

Assim, o tempo que o fóton levou para percorrer para chegar até a Terra será:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{1,50 \times 10^{11}}{0,875 \times (3 \times 10^8)} \therefore \boxed{\Delta t \approx 571 \text{ s} = 9 \text{ min } 31 \text{ s}}$$

25) a) Temos que a média aritmética das 20 velocidades radiais da tabela é:

$$v_m = \frac{\sum_{i=1}^{20} v_{ri}}{20} = \frac{134617}{20} \Rightarrow v_m = 6731 \text{ km/s}$$

Aplicando a Lei da Hubble, temos:

$$v_m = H_0 \cdot D \Rightarrow 6731 = 70 \cdot D \Rightarrow \boxed{D = 96 \text{ Mpc}}$$

b) Como o diâmetro aparente do aglomerado é 100 minutos de arco, temos que o diâmetro físico de Abell 1656 é:

$$\text{tg} 100' = \frac{d}{96 \text{ Mpc}} \Rightarrow \boxed{d = 2,80 \text{ Mpc}}$$

c) Sendo N o número total de galáxias, temos que a dispersão da energia cinética do sistema é:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i - v_m)^2$$

Considerando que os vetores da velocidade estão distribuídos randomicamente, ou seja, possuem 3 graus de liberdade e de valores iguais, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - v_m)^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_x - v_m)^2 + (v_y - v_m)^2 + (v_z - v_m)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_i - v_m)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 3 \cdot (v_r - v_m)^2 = 3 \cdot \sigma_r^2 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{cases} -2\langle K \rangle = \langle U \rangle \\ \langle K \rangle = \frac{3}{2} m \sigma_r^2 \Rightarrow -2 \cdot \frac{3}{2} m \sigma_r^2 = -\frac{3 GMm}{5 R} \Rightarrow \boxed{M = \frac{5R}{G} \cdot \sigma_r^2} \\ \langle U \rangle = -\frac{3 GMm}{5 R} \end{cases}$$

d) A partir da equação da dispersão e dos 20 dados da tabela, temos:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_r - v_m)^2} \Rightarrow \sigma_r = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} (v_r - 6731)^2} \Rightarrow \sigma_r = 1184 \text{ km/s}$$

Logo:

$$M = \frac{5R}{G} \cdot \sigma_r^2 \Rightarrow M = \frac{5(1,43086 \cdot 10^{22})}{6,67 \cdot 10^{-11}} \cdot (1184 \cdot 10^3)^2 \Rightarrow \boxed{M = 4,53 \cdot 10^{45} \text{ kg} \approx 2,28 \cdot 10^{15} M_{\text{Sol}}}$$

e) Usando o resultado do item (d) e da relação apresentada no enunciado, temos:

$$\frac{M}{L} = \frac{2,28 \cdot 10^{15} M_{\text{Sol}}}{5 \cdot 10^{12} L_{\text{Sol}}} \Rightarrow \frac{M}{L} = \frac{2,28 \cdot 10^{15} M_{\text{Sol}}}{5 \cdot 10^{12} L_{\text{Sol}}} \Rightarrow \boxed{\frac{M}{L} = 456 \frac{M_{\text{Sol}}}{L_{\text{Sol}}}}$$

26) a) Comparando os parâmetros de densidade nas eras dominadas pela matéria e pela radiação:

$$\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{r0}} = \frac{\rho_{m0}/\rho_c}{\rho_{r0}/\rho_c} = \frac{0,3}{10^{-4}} = 3\,000$$

No episódio  $z_e$ , as densidades de matéria e radiação são equivalentes (Era do Desacoplamento).

$$\rho_r = \rho_m \Rightarrow \rho_{r0}(1+z_e)^4 = \rho_{m0}(1+z_e)^3 \Rightarrow 1+z_e = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{r0}} = 3\,000 \therefore \boxed{z_e = 2\,999 \approx 3\,000}$$

b) Considerando que o Universo se comporta como um corpo negro ideal, a densidade de radiação será proporcional à quarta potência de temperatura (Lei de Stefan-Boltzmann).

$$\left(\frac{T_e}{T_0}\right)^4 = \frac{\rho_{re}}{\rho_{r0}} = \frac{\rho_{r0}(1+z_e)^4}{\rho_{r0}} \Rightarrow \left(\frac{T_e}{2,732}\right)^4 = (1+z_e)^4 \Rightarrow \frac{T_e}{2,732} = 1+z_e = 3\,000 \Rightarrow T_e = 3\,000 \times 2,732$$

$$\therefore \boxed{T_e \approx 8\,200\text{ K}}$$

c) Através da Lei de Wien, temos que:

$$\lambda_{m\acute{a}x} \cdot T_e = 2,90 \times 10^{-3} \Rightarrow \lambda_{m\acute{a}x} = \frac{2,90 \times 10^{-3}}{8\,200} \Rightarrow \lambda_{m\acute{a}x} = 354\text{ nm}$$

Aplicando à Lei de Radiação de Planck

$$\Rightarrow E_\nu = \frac{hc}{\lambda_{m\acute{a}x}} = \frac{6,62 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8}{359 \times 10^{-9}} \therefore \boxed{E_\nu \approx 5,53 \times 10^{-19}\text{ J} \approx 3,46\text{ eV}}$$

OBS: Este exercício também pode ser resolvido utilizando a Constante de Boltzmann ( $k_B = 1,38 \times 10^{-23}\text{ J/K}$ )

$$E_\nu = 3k_B T_e = 3 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 8\,200 \therefore \boxed{E_\nu = 3,39 \times 10^{-19}\text{ J} = 2,12\text{ eV}}$$

27) a) A partir da Terceira Lei de Kepler e considerando que a Terra leva 23h 56 min 4 s (86 164 s), obtemos o raio da órbita geostacionária.

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{T^2 GM_\oplus}{4\pi^2}} \Rightarrow R \approx 4,215 \times 10^4\text{ km}$$

Para a altura da órbita,  $h = R - R_\oplus$ . Assim  $\boxed{h = 3,578 \times 10^4\text{ km}}$

b) Para a equação *Vis Viva*, devemos levar em conta a energia mecânica ( $E_M$ ) de uma órbita elíptica.

$$E_M = E_C + E_P \Rightarrow -\frac{GMm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \therefore \boxed{v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}}$$

Sendo  $r$  o raio-vetor da órbita e  $a$  o semieixo maior da órbita.

c) Para a transferência de Hohmann (figura 3), devemos definir os parâmetros orbitais da órbita de transferência. Para o semieixo maior,  $r_1$  e  $r_2$  serão os raios das órbitas geostacionária e tûmulo, respectivamente.

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} \Rightarrow a \approx 4,229 \times 10^4\text{ km}$$

Desta maneira, para o foguete realizar a manobra de transferência, ele deve sofrer uma variação de velocidade ( $\Delta v_{12}$ ), considerando que ele se encontra no perigeu da órbita.

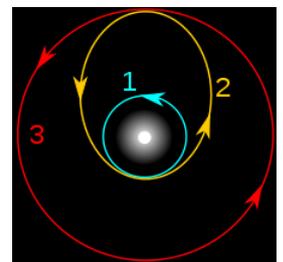


Figura 5

$$\Delta v_{12} = v_{p2} - v_1 = \sqrt{GM_{\oplus} \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_1}} = \sqrt{GM_{\oplus}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2}} - \sqrt{\frac{1}{r_1}} \right]$$

$$\therefore \Delta v_{12} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_1}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right]$$

De maneira análoga, para que o satélite permaneça na órbita circular de raio  $r_2$ , ele deve sofrer uma nova variação de velocidade ( $\Delta v_{23}$ ), considerando que ele fará essa alteração no ponto de apogeu da órbita de transferência. Desta maneira,

$$\Delta v_{23} = v_3 - v_{a2} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_2}} - \sqrt{GM_{\oplus} \left( \frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{GM_{\oplus}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{1}{r_2}} - \sqrt{\frac{2}{r_2} - \frac{2}{r_1 + r_2}} \right]$$

$$\therefore \Delta v_{23} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_2}} \cdot \left[ 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right]$$

Assim, a nave sofrerá uma variação de velocidade total  $\Delta v_{TOTAL} = \Delta v_{12} + \Delta v_{23}$

d) Para calcular a mudança de velocidade, aplica-se os valores para as expressões obtidas para  $\Delta v_{12}$  e  $\Delta v_{23}$ .

$$\Delta v_{12} = 4,836 \text{ m/s}, \Delta v_{23} = 4,829 \text{ m/s} \therefore \Delta v_{TOTAL} = 9,664 \text{ m/s}$$

e) Para enviar ao cemitério aeroespacial, o satélite deve fazer apenas uma mudança de velocidade, considerando que a Transferência de Hohmann seja feita da órbita  $r_1$  para a superfície Terrestre ( $R_{\oplus}$ ), e que o satélite esteja no apogeu da órbita de transferência. Portanto, temos que

$$a = \frac{r_1 + R_{\oplus}}{2} \Rightarrow a = 2,426 \times 10^4 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \Delta v = \sqrt{GM_{\oplus} \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_1}} \therefore \Delta v \approx -1500 \text{ m/s}$$

f) Para que a descida à Terra seja viável, devemos achar um valor para  $r_1$  tal que a mudança de velocidade seja menor ou igual à mudança de velocidade necessária para enviá-lo à órbita túbulo. Portanto, temos que:

$$|\Delta v| \leq \Delta v_{12} + \Delta v_{23}$$

$$\Rightarrow \sqrt{GM_{\oplus} \left( \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + R_{\oplus}} \right)} - \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_1}} \leq \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_1}} \cdot \left[ \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right] + \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_2}} \cdot \left[ 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{r_1 + R_{\oplus}}} \leq \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} + \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \cdot \left[ 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right]$$

**28) a)** Da conservação da energia mecânica em uma órbita fechada, é possível descrever a velocidade do corpo em função do raio-vetor e do semieixo maior da órbita, portanto:

$$v(r) = \sqrt{GM_{\odot} \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r} \cdot \left( 2 - \frac{r}{a} \right)} \Rightarrow v(r_{\oplus}) = v_{\oplus} \cdot \sqrt{2 - \frac{r_{\oplus}}{a}} \therefore v(r_{\oplus}) = 41,5 \text{ km/s}$$

b) No caso de uma órbita, podemos afirmar que o momentum angular por unidade de massa ( $\ell$ ) é conservado. Portanto, podemos calcular  $\ell$  em qualquer ponto de sua órbita. Neste caso, vamos considerar que o meteoróide esteja em seu periélio, isto é, em  $r = a(1 - e)$ . Sendo assim, temos que,

$$v_{m\acute{a}x} = \sqrt{GM_{\odot} \left( \frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$

$$\Rightarrow \ell = r_{min} v_{m\acute{a}x} = a(1-e) \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \therefore \boxed{\ell = \sqrt{GM_{\odot} a(1-e^2)}}$$

c) No referencial do Sol, a velocidade do meteoróide pode ser dividida em dois componentes: um radial (perpendicular ao movimento da Terra) e tangencial (paralelo ao movimento da Terra), de tal forma que  $v(r)^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ . No caso,  $v_{\perp}$  pode ser obtido pela conservação do momentum angular.

$$v_{\perp} = \frac{\ell}{r_{\oplus}} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{r_{\oplus}}} \sqrt{\frac{a}{r_{\oplus}} (1-e^2)} = v_{\oplus} \cdot \sqrt{\frac{a}{r_{\oplus}} (1-e^2)}$$

Agora levando em conta a Terra como referencial, a velocidade do meteoróide ( $v'$ ) também pode ser dividida em componentes radial e tangencial. No caso, a componente radial será a mesma ( $v'_{\parallel} = v_{\parallel}$ ), enquanto que a componente tangencial terá também a velocidade da Terra em seu componente  $v'_{\perp} = v_{\perp} + v_{\oplus}$ , de tal forma que a velocidade do meteoróide, no referencial da Terra, será:

$$v'^2 = v'^2_{\parallel} + v'^2_{\perp} = v_{\parallel}^2 + (v_{\perp} + v_{\oplus})^2 = (v(r_{\oplus}))^2 + v_{\oplus}^2 + 2v_{\perp}v_{\oplus} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v'^2 = v_{\oplus}^2 \left[ 3 - \frac{r_{\oplus}}{a} + 2 \sqrt{\frac{a}{r_{\oplus}} (1-e^2)} \right] \therefore v' = v_{\oplus} \sqrt{3 - \frac{r_{\oplus}}{a} + 2 \sqrt{\frac{a}{r_{\oplus}} (1-e^2)}}$$

Aplicando os dados na expressão final, teremos que  $\boxed{v' = 67,3 \text{ km/s}}$

29) a) A energia total dos nêutrons na estrela é o produto da densidade de energia média pelo volume, isto é

$$U_N = \rho_E \cdot V = \frac{9}{20\pi} \frac{N}{R^3} E(n_F) \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{3}{5} NE(n_F)$$

Escrevendo  $n_F = \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{1/3}$ , temos que

$$E(n_F) = \frac{h^2 n_F^2}{8mV^{2/3}} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3} \Rightarrow U_N = \frac{h^2 \pi}{40m} \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3} \cdot V^{-2/3}$$

Da primeira Lei da Termodinâmica, temos que  $p = -\partial U / \partial V$ . Desta forma, para a pressão de degenerescência  $p_N$

$$p_N = -\frac{\partial U_N}{\partial V} \Rightarrow p_N = \frac{h^2 \pi}{40m} \left(\frac{3N}{\pi}\right)^{5/3} \cdot \left(-\frac{2}{3} V^{-5/3}\right) \therefore \boxed{p_N = \frac{h^2}{20m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}}$$

b) Para acharmos a energia gravitacional de uma esfera, vamos dividir a esfera em muitas cascas esféricas. O volume de cada uma será  $dV = 4\pi r^2 dr$ , sendo  $dr$  a espessura infinitesimal da casca. A massa de cada uma será  $dm = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr$ . Desta forma, obtemos a energia potencial gravitacional se integrando (somando) as energias de todas as cascas esféricas, calculando a interação entre a massa total e a casca individual.

$$U_G = \int -\frac{GM}{r} dm = -GM \int_0^R \frac{\rho 4\pi r^2}{r} dr \therefore U_G = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

OBS: Na expressão final, foi feita a substituição  $M = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$ .

c) A pressão gravitacional será  $p_G = -\frac{\partial U_G}{\partial V}$ . Escrevendo o raio em função do volume, temos que

$$U_G = -\frac{3}{5} GM^2 \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow p_G = -\frac{\partial U_G}{\partial V} = -\frac{GM^2}{5} \left(\frac{4\pi}{3V^4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Em uma condição de equilíbrio, a pressão gravitacional compensa a de degenerescência. Ou seja,  $p_G + p_N = 0$ . Desta forma, ao substituir e isolar o volume, temos que

$$V = \left(\frac{3h^2}{m\pi G M^2}\right)^3 \frac{N^5}{2^8} = \left(\frac{3h^2}{m\pi G}\right)^3 \cdot \frac{1}{(2m)^8 M}$$

Onde substituímos  $N = M/m$ , considerando que a estrela é composta só por nêutrons. Desta forma,

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3h^2}{8\pi G} \left(\frac{3}{2\pi M}\right)^{\frac{1}{3}} m^{-\frac{8}{3}}$$

Substituindo os valores das constantes e adotando  $M = 1,5 M_\odot$ , temos que  $R \approx 11 \text{ km}$ .

d) Para a densidade, temos que

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \therefore \rho \approx 5,7 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3 = 570 \text{ peta kg/m}^3$$

e) Considerando que as componentes da estrela de nêutrons não podem sair em órbita, a velocidade superficial deve ser menor que a orbital mínima (circular). Considerando a estrela como um corpo rígido, podemos adotar  $v = \omega R$ . Portanto,

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \omega_{\text{máx}} R \Rightarrow \omega_{\text{máx}} \approx 1,5 \times 10^{12} \text{ rad/s}$$

**30)** Quando o méson  $\pi^0$  se desintegra, formando duas partículas, tanto a energia quanto o momentum são conservados. A energia inicial do méson  $\pi^0$  é expresso como:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \text{ e, para a energia cinética, } K = E - m_0 c^2$$

Quando ocorre a desintegração, temos a seguinte configuração, onde o fóton de máxima energia apresenta máximo momentum linear, enquanto o fóton com mínima energia, mínimo momentum linear (figura 1).



Figura 6

Desta forma, teremos as seguintes condições de cada um dos fótons:

$$\begin{cases} mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_{\text{máx}} - E_{\text{mín}}}{c} \\ mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_{\text{máx}} + E_{\text{mín}} \end{cases} \Rightarrow v = c \cdot \frac{E_{\text{máx}} - E_{\text{mín}}}{E_{\text{máx}} + E_{\text{mín}}}$$

**31)** Para determinar o fluxo, inicialmente devemos calcular, no referencial do múon (referencial próprio), o intervalo de tempo que ele leva ( $\Delta t_M$ ) para percorrer uma altura de 20 km. Entretanto, no referencial local, o múon levará um intervalo de tempo  $\Delta t_L$ . Desta forma, teremos que:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,998^2)}} \Rightarrow \gamma \approx 15,8$$

$$\Rightarrow \Delta t_L = \frac{h}{v} = \gamma \Delta t_M \Rightarrow \Delta t_M = \frac{20\,000}{(0,998 \times 3 \times 10^8) \times 15,8} \therefore \Delta t_M \approx 4,22 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Para o fluxo de múons ( $\Phi$ ), podemos estimar através do decaimento exponencial destas partículas; considerando o tempo de vida médio ( $\tau_V = 2,2 \times 10^{-6} \text{ s}$ ), o número de partículas após uma quantidade de tempo  $\Delta t$  será:

$$N = N_0 \exp[-\Delta t/\tau_V] \Rightarrow \Phi_{20 \text{ km}} = \Phi_0 \exp[-\Delta t_M/\tau_V] \Rightarrow 10\,000 = \Phi_0 \exp[-4,22 \times 10^{-6}/2,2 \times 10^{-6}]$$

$$\therefore \boxed{\Phi_0 = 6,81 \times 10^4 \text{ múons} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}}$$

**32) a)** Da figura 1, nota-se que uma estrela tipo solar com  $(B - V)_\odot = 0,65$  apresenta magnitude aparente na banda visual como  $V_\odot = 21,5$ . Da mesma forma, uma apresenta que se apresenta no ponto de *turn-off* apresenta magnitude  $V_t = 19,2$ . Desta forma, pela equação de Pogson, temos que

$$V_\odot - V_t = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_\odot}{L_t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L_t}{L_\odot} \approx 8,32$$

Esta informação permite estimar o tempo de vida da estrela no ponto de *turn-off*, o que permite estimar a idade do aglomerado. O tempo de vida da estrela na sequência principal ( $\Delta t_{SP}$ ) é dado pela relação a seguir:

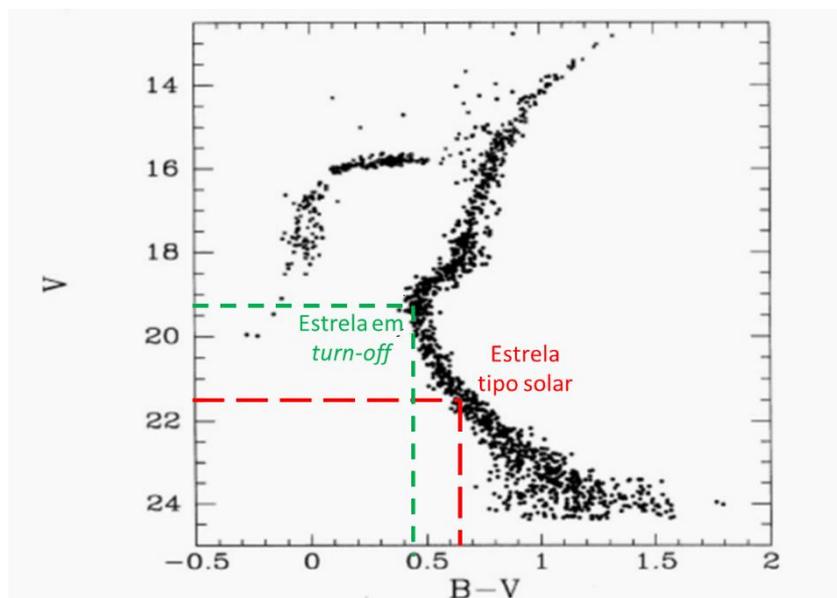


Figura 7

$$\Delta t_{SP} \propto \frac{M}{L} \propto \frac{L^{1/3}}{L} \propto L^{-2/3}$$

Como o tempo de vida médio do Sol na sequência principal é da ordem de 10 bilhões de anos, podemos estimar a idade do aglomerado como:

$$T_{cl} = 10 \times 10^9 \text{ anos} \times \left(\frac{L_t}{L_\odot}\right)^{-2/3} \therefore \boxed{T_{cl} \approx 2,43 \times 10^9 \text{ anos}}$$

b) Do módulo de distância, temos que:

$$V_\odot - M_{v,\odot} = 5 \cdot \log d_{pc} - 5 \Rightarrow 21,5 - 4,83 = 5 \cdot \log d_{pc} - 5 \therefore \boxed{d \approx 21,6 \text{ kpc}}$$

c) Para a estrela mais massiva, o tempo de vida que ela passou na sequência principal ( $\Delta T_{SP}$ ) é de

$$\Delta T_{SP} = \frac{2,43 \times 10^9}{110\%} = 2,21 \times 10^9 \text{ anos}$$

Do ponto de vista do tempo de vida na sequência principal e da relação massa-luminosidade:

$$\Delta T_{SP} \propto \frac{M}{L} \propto \frac{M}{M^3} \propto M^{-2}$$

Assim, a massa da estrela no período pós sequência principal será:

$$M_{m\acute{a}x} = \left(\frac{2,21}{10}\right)^{\frac{1}{2}} M_{\odot} \therefore \boxed{M_{m\acute{a}x} = 2,13 M_{\odot}}$$

d) Analisando a massa da estrela que se encontra no ponto de *turn-off*, nós obtemos um valor de massa que pode ser usado como parâmetro para a expressão apresentada no problema

$$\left(\frac{M_{m\acute{i}n}}{M_{\odot}}\right)^{1/3} \propto \left(\frac{L_t}{L_{\odot}}\right)^{1/3} = (8,32)^{1/3} \Rightarrow M_{to} \approx 2,03 M_{\odot}$$

Assim, aplicando os limites de massa superior e de *turn-off* na expressão do problema,

$$515 = A(2,03^{-1,35} - 2,13^{-1,35}) \therefore \boxed{A \approx 2,13 \times 10^4}$$

e) Vamos considerar que o aglomerado esteja contido em um cilindro de raio  $2R$  (diâmetro do aglomerado), e que o telescópio tenha resolução suficiente para observar pelo menos duas estrelas localizadas próximas ao centro do aglomerado, que não está resolvido. Desta forma, pela expressão do poder separador

$$\theta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} = 1,22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{0,1} \Rightarrow \theta = 6,71 \times 10^{-6} \text{ rad} = 1,38 \text{ arcsec}$$

Assim, analisando o volume do cilindro, temos que

$$\frac{2}{2R \times \pi \left(\frac{D^2}{4}\right)} = \frac{N_{m\acute{i}n}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow N_{m\acute{i}n} = \frac{16}{3} \left(\frac{R}{D}\right)^2 = \frac{16}{3} \left(\frac{\frac{12,3}{2} \times 60 \text{ arcsec}}{1,38 \text{ arcsec}}\right)^2 \therefore \boxed{N_{m\acute{i}n} \approx 3,81 \times 10^5 \text{ estrelas}}$$

f) Usando os resultados obtidos no tópico anterior, temos que:

$$3,81 \times 10^5 = 2,13 \times 10^4 (M_{m\acute{i}n}^{-1,35} - 20^{-1,35}) \Rightarrow M_{m\acute{i}n} = \left(\frac{3,81 \times 10^5}{2,13 \times 10^4} + 20^{-1,35}\right)^{\frac{1}{-1,35}} \therefore \boxed{M_{m\acute{i}n} \approx 0,118 M_{\odot}}$$

**33) a)** Do nosso ponto de vista (figura 3), o jato se movimentou a uma distância  $\overline{AB}$  em um tempo  $\Delta t$

$$\overline{AB} = d_{ap} = v \cdot \sin \theta \cdot \Delta t$$

assim, a diferença de caminho percorrido  $\overline{BC}$  entre os fótons emitidos ( $v_1$  e  $v_2$  na figura 1) será de:

$$\overline{BC} = c\Delta t - v \cos \theta \cdot \Delta t$$

E, a diferença de tempo aparente entre os fótons será:

$$\Delta t_{ap} = \frac{\overline{BC}}{c} = \Delta t - \beta \cos \theta \cdot \Delta t$$

Com estes dados, podemos obter a velocidade aparente.

$$\Rightarrow v_{ap} = \frac{d_{ap}}{\Delta t_{ap}} = \frac{\Delta t \cdot v \sin \theta}{\Delta t - \beta \cos \theta \cdot \Delta t} \therefore \boxed{\beta_{ap} = \frac{v_{ap}}{c} = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta}}$$

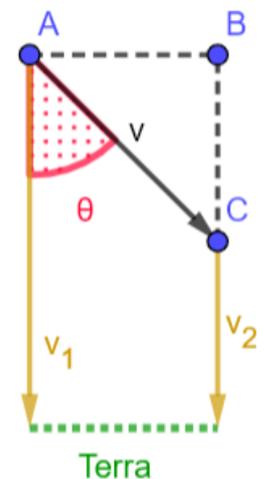


Figura 8

b) Para encontrar os máximos e mínimos, devemos encontrar os valores de  $\theta$  tal que  $\frac{d\beta_{ap}}{d\theta} = 0$ . Assim, temos a seguinte equação:

$$\frac{d\beta_{ap}}{d\theta} = \frac{\beta \cos \theta (1 - \beta \cos \theta) - \beta \sin \theta (\beta \sin \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^2} = 0 \Rightarrow \beta = \cos \theta$$

ou seja,  $\beta_{ap}$  será máximo para um dado valor de  $\beta$  quando  $\boxed{\beta = \cos \theta}$ .

Aplicando este valor na equação obtida no tópico a, e considerando o limite máximo ( $\beta_{ap} = 1$ ), obteremos o ângulo  $\theta$  tal que obteremos velocidades superluminais.

$$\beta_{ap}^{m\acute{a}x} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 - \cos \theta \cos \theta} = \cot \theta = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cot \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \boxed{\beta_{m\acute{i}n} = \cos \theta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

c) Para calcular  $\beta_{ap}$ , devemos converter  $\mu_a$  e  $\mu_r$  de milissegundos de arco por dia para rad/s. Desta forma, temos que:

$$\begin{cases} v_a = \mu_a \cdot D \\ v_r = \mu_r \cdot D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_a = \frac{23,6 \times 10^{-3}}{3600} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \times \frac{1 \text{ dia}}{86400 \text{ s}} \times (11 \times 10^3 \times 3,09 \times 10^{16} \text{ m}) \\ v_r = \frac{10,0 \times 10^{-3}}{3600} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} \times \frac{1 \text{ dia}}{86400 \text{ s}} \times (11 \times 10^3 \times 3,09 \times 10^{16} \text{ m}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_a = 4,50 \times 10^8 \text{ m/s} \\ v_r = 1,91 \times 10^8 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \beta_a = 1,50 \\ \beta_r = 0,636 \end{matrix}}$$

No caso, usando o valor de aproximação ( $\beta_a$ ) como o valor máximo a ser observado, obtemos a seguinte solução

$$\beta_{ap}^{m\acute{a}x} = \cot \theta = 1,50 \Rightarrow \beta_{m\acute{i}n,a} = \cos(\cot^{-1} 1,50) = \cos \left[ \tan^{-1} \left( \frac{1}{1,50} \right) \right] \therefore \boxed{\beta_{m\acute{i}n,a} = 0,832}$$

d) Analisando os termos apresentados, temos que

$$\begin{cases} \mu_a = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \cos \theta} \frac{c}{D} \\ \mu_r = \frac{\beta \sin \theta}{1 + \cos \theta} \frac{c}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D\mu_a(1 - \beta \cos \theta) = \beta c \sin \theta \\ D\mu_r(1 + \beta \cos \theta) = \beta c \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D\mu_a\mu_r \left( \frac{1}{\beta} - \cos \theta \right) = \mu_r c \sin \theta & (1) \\ D\mu_r\mu_a \left( \frac{1}{\beta} + \cos \theta \right) = \mu_a c \sin \theta & (2) \end{cases}$$

Subtraindo (1) de (2), temos que:

$$D\mu_r\mu_a(2 \cos \theta) = (\mu_a - \mu_r)c \sin \theta \therefore \boxed{D = \frac{c}{2} \left( \frac{\mu_a - \mu_r}{\mu_a\mu_r} \right) \tan \theta}$$

Do tópico c), temos que  $\mu_a = 1,32 \times 10^{-12}$  rad/s e  $\mu_r = 5,61 \times 10^{-13}$ . Desta maneira, aplicando estes valores na expressão acima,

$$\theta = \tan^{-1} \left[ \frac{2D}{c} \left( \frac{\mu_a\mu_r}{\mu_a - \mu_r} \right) \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{2 \times 11 \times 10^3 \times 3,09 \times 10^{16}}{3,00 \times 10^8} \left( \frac{1,32 \times 10^{-12} \times 5,61 \times 10^{-13}}{1,32 \times 10^{-12} - 5,61 \times 10^{-13}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2,21) \therefore \boxed{\theta = 65,6^\circ}$$

e) Das mesmas expressões para  $\mu_a$  e  $\mu_r$ , temos o seguinte processo:

$$\begin{cases} \mu_a = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \cos \theta} \frac{c}{D} \\ \mu_r = \frac{\beta \sin \theta}{1 + \cos \theta} \frac{c}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D\mu_a(1 - \beta \cos \theta) = \beta c \sin \theta & (3) \\ D\mu_r(1 + \beta \cos \theta) = \beta c \sin \theta & (4) \end{cases}$$

Subtraindo (3) de (4), temos que:

$$D\mu_r + D\mu_r\beta \cos \theta - (D\mu_a - D\mu_a\beta \cos \theta) = 0 \therefore \boxed{\beta \cos \theta = \frac{\mu_a - \mu_r}{\mu_a + \mu_r}}$$

Portanto, aplicando os valores de  $\mu_a$  e  $\mu_r$ , temos o seguinte valor para  $\beta$

$$\beta = \frac{1}{\cos 65,6^\circ} \times \left( \frac{23,6 - 10,0}{23,6 + 10,0} \right) \therefore \boxed{\beta = 0,980}$$

*OBS: Observando este valor para  $\beta$ , percebe-se que a bolha de plasma emitida por este microquasar é o objeto mais veloz visto em toda Galáxia!*

f) Reescrevendo a equação apresentada em termos da razão  $M_*/M_{\text{BN}}$ , temos a seguinte expressão:

$$\frac{(M_{\text{BN}} \sin \theta)^3}{M_{\text{BN}}^2 \left(1 + \frac{M_*}{M_{\text{BN}}}\right)^2} = \frac{P_{\text{orb}} K_d^3}{2\pi G} \Rightarrow M_{\text{BN}} = \frac{P_{\text{orb}} K_d^3 \left(1 + \frac{M_*}{M_{\text{BN}}}\right)}{2\pi G \sin^3 \theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{\text{BN}} = \frac{(33,5 \times 24 \times 3600) \times (140 \times 10^3)^3}{2\pi \times 6,67 \times 10^{-11}} \times \frac{\left(1 + \frac{1}{12,3}\right)^2}{\sin^3 65,6^\circ} \therefore \boxed{M_{\text{BN}} = 2,93 \times 10^{31} \text{ kg} = 14,7 M_\odot}$$

34) a) Do teorema do Virial, temos que:

$$2K + U = 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{2}U$$

Onde  $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle$  e  $U_{\text{grav}} = -\frac{3GM^2}{5R}$ . Combinando estes termos, podemos determinar a massa do Grupo Local de Galáxias.

$$M = \frac{5}{3} \left( \frac{R}{G} \right) \langle v^2 \rangle$$

Através da tabela, temos que  $\langle v^2 \rangle = 5,9 \times 10^4 \text{ (km/s)}^2$  e  $R = 1 \text{ 450 kpc}$ . Neste caso, estamos considerando que o limite do Grupo Local é determinado pela galáxia mais distante da Via Láctea. Substituindo os valores, temos que:

$$M = \frac{5}{3} \times \frac{(1 \text{ 450} \times 10^3 \times 3,09 \times 10^{16})}{6,67 \times 10^{-11}} \times 5,9 \times 10^4 \times 10^6$$

$$\therefore \boxed{M \approx 6,60 \times 10^{43} \text{ kg} = 3,3 \times 10^{13} M_\odot}$$

Tabela 1

$M_*$	$L_* (L_\odot)$
-21,1	$2,29 \times 10^{10}$
-18,9	$3,02 \times 10^9$
-18,1	$1,45 \times 10^9$
-17,6	$9,12 \times 10^8$
-16,4	$3,02 \times 10^8$
-16,4	$3,02 \times 10^8$
-16,3	$2,75 \times 10^8$
-16,2	$2,51 \times 10^8$
-15,8	$1,74 \times 10^8$
-15,3	$1,10 \times 10^8$
-14,9	$7,59 \times 10^7$
-14,8	$6,92 \times 10^7$
-14,4	$4,79 \times 10^7$
-14,3	$4,37 \times 10^7$
-14	$3,31 \times 10^7$
-14	$3,31 \times 10^7$
-13	$1,32 \times 10^7$
-12,7	$1,00 \times 10^7$
-12	$5,25 \times 10^6$
-12	$5,25 \times 10^6$

b) Da Equação de Pogson, obtém-se uma expressão que calcula a luminosidade de cada galáxia, em função da magnitude absoluta do sol ( $M_\odot = +4,80$ ).

$$M_* - M_\odot = -2,5 \cdot \log \left( \frac{L_*}{L_\odot} \right) \Rightarrow \frac{L_*}{L_\odot} = 10^{\frac{M_\odot - M_*}{2,5}}$$

As luminosidades de cada galáxia são apresentadas na tabela 1. Para calcular a Luminosidade do Grupo Local, deve ser feita a somatória de todas as luminosidades. Desta forma, temos que:

$$L_{\text{GL}} = \sum L_* \therefore L_{\text{GL}} = 3,09 \times 10^{10} L_\odot$$

Portanto, temos que a razão Massa-Luminosidade será:

$$\frac{M}{L} = \frac{3,3 \times 10^{13}}{3,09 \times 10^{10}} \therefore \boxed{\frac{M}{L} \approx 1068}$$

35) a) Da Lei de Rayleigh-Jeans, podemos calcular a luminosidade Solar. Para isto, levamos em conta que emissão térmica do Sol ocorre em uma frequência de 3 GHz e temperatura efetiva da ordem de 5 770 K.

$$L_\nu = B_\nu \cdot 4\pi R_\odot^2 = \frac{2k_B T}{c^2} \nu^2 \cdot 4\pi R_\odot^2$$

A uma distância de 1 ua, obtemos o fluxo monocromático vindo do sol em uma dada frequência ( $f_\nu$ ) e, conseqüentemente, o fluxo de energia que será captado pelo FAST em uma banda de frequências ( $F_\nu$ ) em toda superfície do prato de diâmetro  $d_c$ .

$$f_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi D^2} \Rightarrow F_\nu = f_\nu \Delta\nu \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_c}{2}\right)^2 = \frac{2k_B T}{c^2} \nu^2 \cdot \frac{4\pi R_\odot^2}{4\pi D^2} \cdot \Delta\nu \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_c}{2}\right)^2 \Rightarrow F_\nu = \frac{k_B T}{c^2} \nu^2 \cdot \frac{R_\odot^2}{D^2} \cdot \Delta\nu \cdot \pi \cdot \frac{d_c^2}{2}$$

Portanto, a quantidade de energia a ser coletada em uma hora de observação ( $E_\odot$ ) será:

$$E_\odot = F_\nu \Delta t = \frac{k_B T}{c^2} \nu^2 \cdot \frac{R_\odot^2}{D^2} \cdot \Delta\nu \cdot \pi \cdot \frac{d_c^2}{2} \cdot \Delta t \therefore \boxed{E_\odot = 2,62 \times 10^{-5} \text{ J}}$$

b) Considerando uma página de papel de tamanho A4 (297 mm  $\times$  210 mm), a massa desse papel será:

$$m = \rho(L_1 \cdot L_2) = 0,08 \times (0,297 \times 0,21) \Rightarrow \\ \Rightarrow m = 4,99 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

Para virar uma página de papel, considere que ela será puxada pelo lado maior, fazendo com que o centro de massa do papel atinja a altura  $L_2/2$  (figura 2). Para isto, a energia potencial gravitacional será

$$E_{PG} = \frac{mgL_2}{2} \therefore \boxed{E_{PG} \approx 5,14 \times 10^{-3} \text{ J}}$$

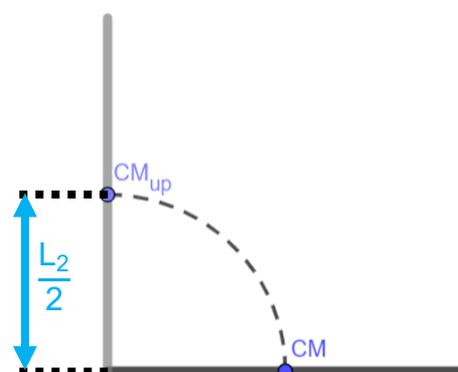


Figura 9

c) Analisando ambas as energias, conclui-se que a energia gasta para levantar a folha de papel é maior do que a energia coletada pelo FAST no arranjo de frequências em discussão. ( $E_{PG} > E_\odot$ ).

36) a) A partir dos dados da tabela 1 do exercício, temos que:

$$a_{m\acute{a}x} = \frac{RV_3 - RV_1}{MJD_3 - MJD_1} = \frac{42,567 - (-37,417)}{56\,233,8732 - 56\,204,9537} \Rightarrow \boxed{a_{m\acute{a}x} = 2,766 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{dia})}$$

b) Usando o princípio da Gravitação Universal e a Segunda Lei de Newton,

$$F = M_1 a = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \Rightarrow M_2 = \frac{(ar^2)}{G}$$

Para este problema, considera-se  $a = a_{m\acute{a}x}$  e, para a distância entre as duas estrelas, podemos obter pela média do módulo das velocidades:

$$r \approx \frac{\sum_{i=1}^3 |v_i \cdot 1\,000|}{3} \cdot [(t_3 - t_1) \cdot 86\,400] \Rightarrow r = 9,564 \times 10^{10} \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow M_2 = \frac{[a_{m\acute{a}x} \times \left(\frac{1\,000}{86\,400}\right)]}{G} \cdot r \therefore \boxed{M_2 \approx 4,39 \times 10^{30} \text{ kg} = 2,2 M_\odot}$$

c) Pela análise da tabela 2 do exercício, podemos estimar a incerteza da velocidade radial como  $\pm 0,1$  km/s. Entretanto, esta incerteza se torna muito pequena quando comparada com a escala do gráfico. A figura 5 mostra um exemplo de gráfico realizado usando os dados. No caso, não foi utilizada toda a folha do gráfico para aproveitar as escalas da própria folha, o que facilitou a diagramação dos dados.

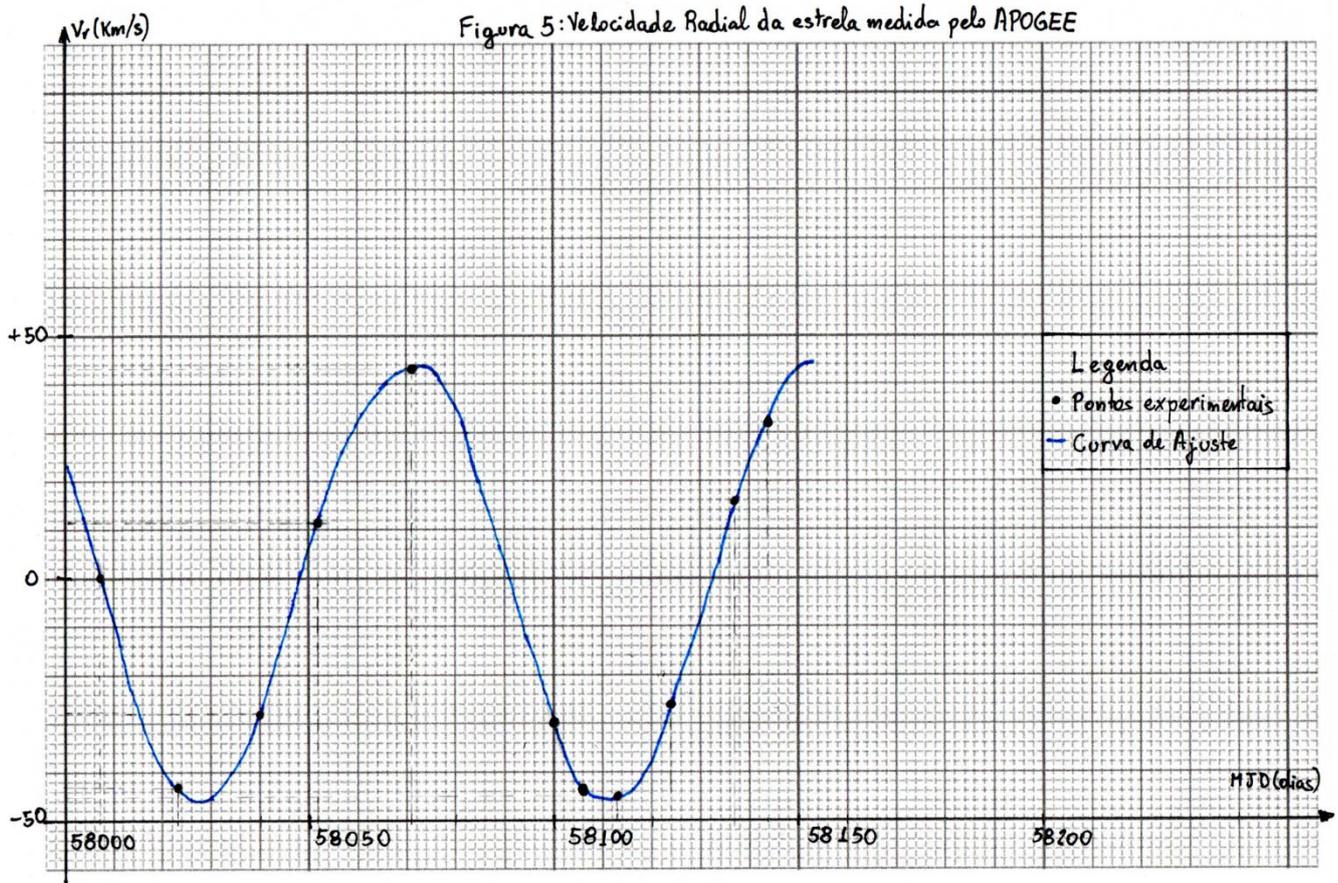


Figura 10: exemplo de gráfico

Desta forma, pelos dados apresentados na figura 5, podemos estimar  $P_{orb} = 84 \pm 1$  dia e  $K = 46 \pm 1$  km/s.

d) Do conceito de velocidade em uma órbita circular

$$\frac{2\pi r_{orb}}{P_{orb}} = K \Rightarrow r_{orb} = \frac{P_{orb}K}{2\pi} = \frac{84 \times (86\,400) \times (46\,000)}{2\pi}$$

$$\therefore r_{orb} = 53,1 \times 10^{10} \text{ m} = 76,3 R_{\odot} = 0,354 \text{ ua}$$

e) Podemos comparar a função de massa com a Lei da Gravitação Universal de Newton

$$F_G = \frac{GM_1M_2}{D^2} = M_1 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 r_{orb}$$

Além disso, em um sistema binário, vale que:

$$r_{orb} = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \cdot D = \frac{P_{orb}K}{2\pi \sin i_{orb}}$$

Desta forma, comparando com a função de massa,

$$\Rightarrow f(M_1, M_2) = \frac{(M_2 \sin i_{orb})^3}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{K^3 P_{orb}}{2\pi G} = \frac{(46\,000)^3 \times 84 \times 86\,400}{2\pi \times 6,67 \times 10^{-11}}$$

$$\therefore \boxed{f(M_1, M_2) \approx 1,69 \times 10^{30} \text{ kg} = 0,843 M_\odot}$$

f) Com a paralaxe, obtemos a distância da binária:

$$d = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2,72 \times 10^{-4}} \Rightarrow d = 3,68 \text{ kpc}$$

Para a incerteza,

$$\frac{\Delta d}{d} = \sqrt{\left(-\frac{\Delta \pi}{\pi}\right)^2} \Rightarrow \Delta d = \frac{\Delta \pi}{\pi} \cdot d = \frac{0,05}{2,72 \times 10^{-4}} \times 3,68 \Rightarrow \Delta d = 0,7 \text{ kpc}$$

$$\therefore d \pm \Delta d = (4 \pm 1) \text{ kpc}$$

Desta forma, teremos a luminosidade como

$$L_1 = 4\pi d^2 \cdot F = 4\pi(4 \times 3,09 \times 10^{19})^2 \times (1,1 \times 10^{-12}) \Rightarrow L_1 \approx 2,11 \times 10^{29} \text{ W} = 551 L_\odot$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta L_1}{L_1}\right)^2 = \left(\frac{\Delta F}{F}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta d}{d}\right)^2 \Rightarrow \Delta L_1 = \sqrt{\left(\frac{0,1}{1,1}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 1}{4}\right)^2} \times 551 \approx 280 L_\odot$$

$$\therefore \boxed{L_1 \pm \Delta L_1 = (6 \pm 3) \times 10^2 L_\odot}$$

Para o raio da estrela, utiliza-se a Lei de Stefan-Boltzmann,

$$L_1 = 4\pi \cdot \sigma T^4 R_1^2 \Rightarrow R_1 = \sqrt{\frac{L_1}{4\pi \cdot \sigma T^4}} = \sqrt{\frac{2,11 \times 10^{29}}{5,67 \times 10^{-8} \times 4890^4 \times 4\pi}} \Rightarrow R_1 \approx 2,28 \times 10^{10} \text{ m} = 32,7 R_\odot$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 = \left(-2 \cdot \frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L_1}{L_1}\right)^2 \Rightarrow \Delta R_1 = 32,7 \times \sqrt{\left(-2 \times \frac{130}{4\,890}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{0,1}{1,1}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 1}{4}\right)^2\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta R_1 \approx 0,625 R_\odot \therefore \boxed{R_1 \pm \Delta R_1 = (33 \pm 1) R_\odot}$$

Para a massa, devemos determinar a gravidade superficial da estrela, assim como sua incerteza,

$$g = 10^{\log g} = 10^{2,2} \Rightarrow g \approx 158,5 \text{ cm/s}^2 = 1,585 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \Delta g = g \cdot \ln 10 \cdot \Delta(\log g) = 158,5 \times \ln 10 \times (0,1) \Rightarrow \Delta g \approx 0,36 \text{ m/s}^2$$

$$\therefore g \pm \Delta g = (1,6 \pm 0,4) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Portanto, a massa da estrela será:

$$M_1 = \frac{g R_1^2}{G} = \frac{1,585 \times (2,28 \times 10^{10})^2}{6,67 \times 10^{-11}} \Rightarrow M_1 \approx 1,235 \times 10^{31} \text{ kg} = 6,176 M_\odot$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta M_1}{M_1}\right)^2 = \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 \Rightarrow \Delta M_1 = 6,176 \times \sqrt{\left(\frac{0,4}{1,6}\right)^2 + \left(2 \times \frac{0,6}{32,7}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta M_1 \approx 1,42 M_\odot \therefore \boxed{M_1 \pm \Delta M_1 = (6,2 \pm 1,4)M_\odot}$$

Finalmente, para o ângulo de inclinação,

$$\sin i = \frac{P_{orb} \cdot v \sin i}{2\pi R_1} = \frac{84 \times (86\,400) \times (14\,100)}{2\pi \times 2,28 \times 10^{10}} \Rightarrow \sin i \approx 0,714$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\Delta(\sin i)}{\sin i}\right]^2 = \left(-\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left[\frac{\Delta(v \sin i)}{v \sin i}\right]^2 \Rightarrow \Delta(\sin i) = 0,714 \times \sqrt{\left(-\frac{0,6}{32,7}\right)^2 + \left(\frac{0,6}{14,1}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta(\sin i) \approx 0,033 \therefore \boxed{\sin i \pm \Delta(\sin i) = 0,71 \pm 0,03}$$

g) Analisando a luminosidade calculada no item anterior ( $\approx 550 L_\odot$ ) e temperatura efetiva (4 890 K), podemos concluir que esta estrela é uma gigante vermelha, ou seja, opção (3).

h) Com os dados calculados nos itens (c) e (f), é possível obter uma expressão que relaciona as massas  $M_1$  e  $M_2$

$$f(M_1, M_2) = \frac{(M_2 \sin i_{orb})^3}{(M_1 + M_2)^2} \Rightarrow M_1 = \pm M_2 \left[ 1 - \sqrt{M_2} \cdot \sqrt{\frac{(\sin i_{orb})^3}{f(M_1, M_2)}} \right]$$

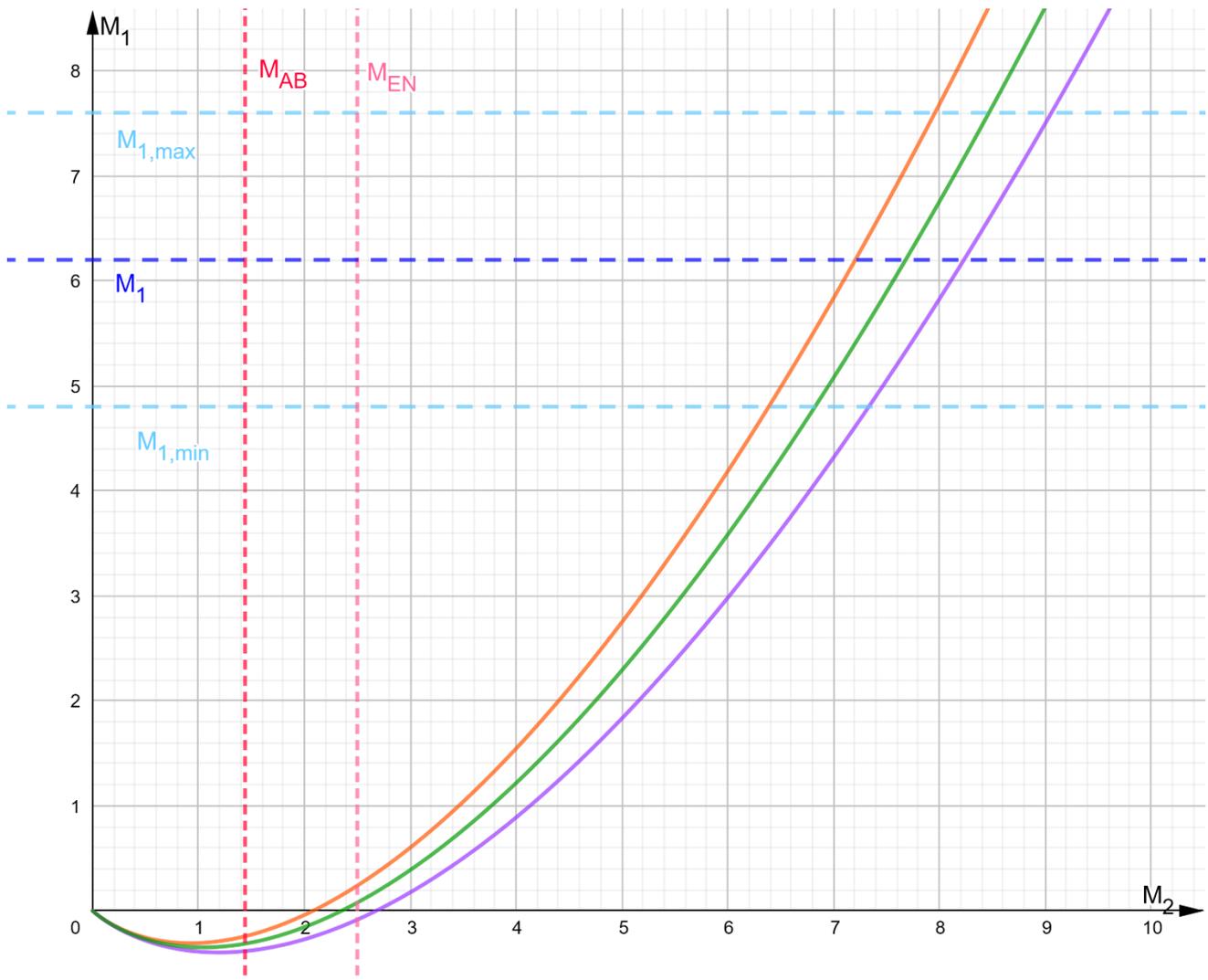
Estabelecendo  $M_1$  em função de  $M_2$ , podemos aplicar estes dados no gráfico (figura 6), com um dado arranjo de massas. Devemos notar que, ao aplicar a raiz quadrada sobre a expressão, podem existir uma faixa de valores positivos ou negativos para  $M_1$ .

Analisando a faixa de massas para  $M_2$ , nota-se que existe um arranjo maior de massas de  $M_1$  caso o sinal da função for negativo; portanto vamos analisar a função adotando este sinal. Na tabela abaixo, temos a função de acordo com os termos pedidos na questão. Para facilitar, vamos adotar  $M_1 = y$ ,  $M_2 = x$ , com as unidades em massas solares ( $M_\odot$ )

Termo senoidal (A)	$B = \sqrt{\frac{A^3}{f(M_1, M_2)}}, f(M_1, M_2) \approx 0,843 M_\odot$	$y = x(\sqrt{x} \cdot B - 1)$
$\sin i = 0,71$	0,652	$y = x(\sqrt{x} \cdot 0,652 - 1)$
$\sin i + \Delta(\sin i)$ $= 0,74$	0,693	$y = x(\sqrt{x} \cdot 0,693 - 1)$
$\sin i - \Delta(\sin i)$ $= 0,68$	0,611	$y = x(\sqrt{x} \cdot 0,611 - 1)$

i) A região horizontal é delimitada pelas massas  $M_1 \in [4,8 M_\odot; 7,6 M_\odot]$ . Para uma anã-branca, o limite de massa é da ordem de  $1,44 M_\odot$  e, para estrelas de nêutrons, temos  $2,5 M_\odot$ . Desta forma, na figura 6, temos que a massa da companheira poderá ser  $7,7_{-0,5}^{+0,6} M_\odot$  (que corresponde aos limites estabelecidos entre as funções limites **máxima** e **mínima** calculadas anteriormente), o que ultrapassa o limite máximo de uma estrela de nêutrons. Portanto, a companheira invisível da gigante vermelha é um buraco negro.

Figura 11: gráfico feito pelo aplicativo Geogebra.



37) a) Do gráfico da curva de luz (figura 1), a data pode apresentar uma precisão de 0,5 dia por (metade da menor divisão da escala do eixo horizontal). Desta maneira, o pico da magnitude se encontra nas coordenadas:

$$MJD_{0,V} = 56\,520,5 \pm 0,5 \text{ dia} \quad \text{e} \quad m_{0,V} = 4,55 \pm 0,05 \text{ mag}$$

b) A diminuição em 2 e 3 magnitudes ocorrem nas coordenadas apresentadas na tabela 1.

Tabela 3

$i$	$MJD_{i,V}$ (dia)	$m_{i,V}$ (mag)	$t_{i,V} = MJD_{i,V} - MJD_{0,V}$ (dia)
2	56 532,0 $\pm$ 0,5	+6,55 $\pm$ 0,05	11,5 $\pm$ 0,5
3	56 545,0 $\pm$ 0,5	+7,55 $\pm$ 0,05	24,5 $\pm$ 0,5

Nova Del 2013 – Johnson V light curve

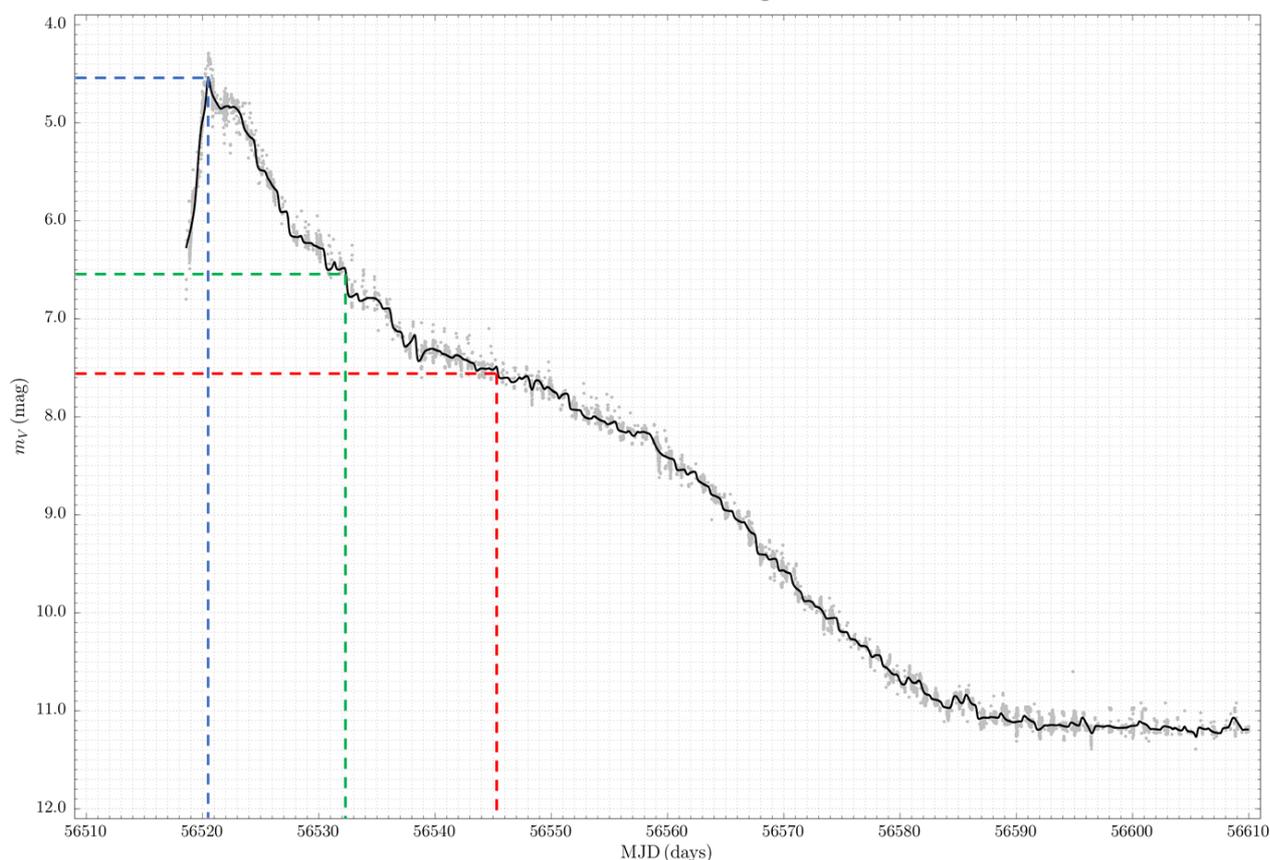


Figura 12

c) A partir das expressões apresentadas, temos que:

- Della Valle & Livio

$$M_{0,V}^{(a)} = -7,92 - 0,81 \arctan \left[ \frac{1,32 - \log t_2}{0,23} \right] \Rightarrow M_{0,V}^{(a)} = -7,92 - 0,81 \times (0,845 \text{ rad}) \therefore M_{0,V}^{(a)} = -8,60$$

- Downes & Durbeck

$$\begin{cases} M_{0,V}^{(b)} = -11,32 + 2,55 \log t_2 \\ M_{0,V}^{(c)} = -11,99 + 2,54 \log t_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_{0,V}^{(b)} = -8,62 \\ M_{0,V}^{(c)} = -8,46 \end{cases}$$

Desta forma, o valor médio será  $\overline{M_{0,V}} = -8,56$ .

Para o desvio padrão:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (M_{V,0}^{(i)} - \overline{M_{0,V}})^2}{n-1}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{[-8,60 - (-8,56)]^2 + [-8,62 - (-8,56)]^2 + [-8,46 - (-8,56)]^2}{3-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma \approx 0,09 \approx 0,1 \therefore \boxed{M_{0,V} = -8,6 \pm 0,1}$$

OBS: Neste exercício, não foi solicitado os desvios de cada expressão apresentada no problema. Caso fosse solicitado, como você faria? Lembre-se que a propagação de erro para uma função  $f(x, y, z, \dots)$  pode ser obtida por:

$$\sigma_f^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 + \dots$$

d) Da relação entre excesso de cor e extinção total, temos que:

$$R = \frac{A_V}{E(B-V)} \Rightarrow A_V = 3,1 \times (0,184 \pm 0,035) \therefore \boxed{A_V = 0,57 \pm 0,11}$$

e) Do conceito de módulo de distância,

$$m_V - M_V = 5 \log d_{\text{pc}} - 5 + A_V \Rightarrow \log d_{\text{pc}} = \frac{m_V - M_V + 5 - A_V}{5} = \frac{4,55 - (-8,6) + 5 - 0,57}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{\text{pc}} = 10^{3,516} \therefore d_{\text{pc}} \approx 3\,281 \text{ pc}$$

Para a incerteza da distância, vale lembrar que  $\Delta a^x = a^x \ln a \cdot \Delta x$ . Desta forma, obtemos a seguinte relação:

$$\Delta d_{\text{pc}} = 10^{\left[\frac{m_V - M_V + 5 - A_V}{5}\right]} \times \ln 10 \times \Delta \left[\frac{m_V - M_V + 5 - A_V}{5}\right]$$

O erro do termo exponencial é obtido com a soma das incertezas associadas a  $m_V$ ,  $M_V$  e  $A_V$ , o que implica em:

$$\Delta \left[\frac{m_V - M_V + 5 - A_V}{5}\right] \approx \frac{0,05 + 0,1 + 0,11}{5} = 0,05 \Rightarrow \Delta d_{\text{pc}} = 10^{3,516} \times \ln 10 \times 0,05 \therefore \Delta d_{\text{pc}} \approx 393 \text{ pc}$$

$$\therefore \boxed{d = 3,3 \pm 0,4 \text{ kpc}}$$

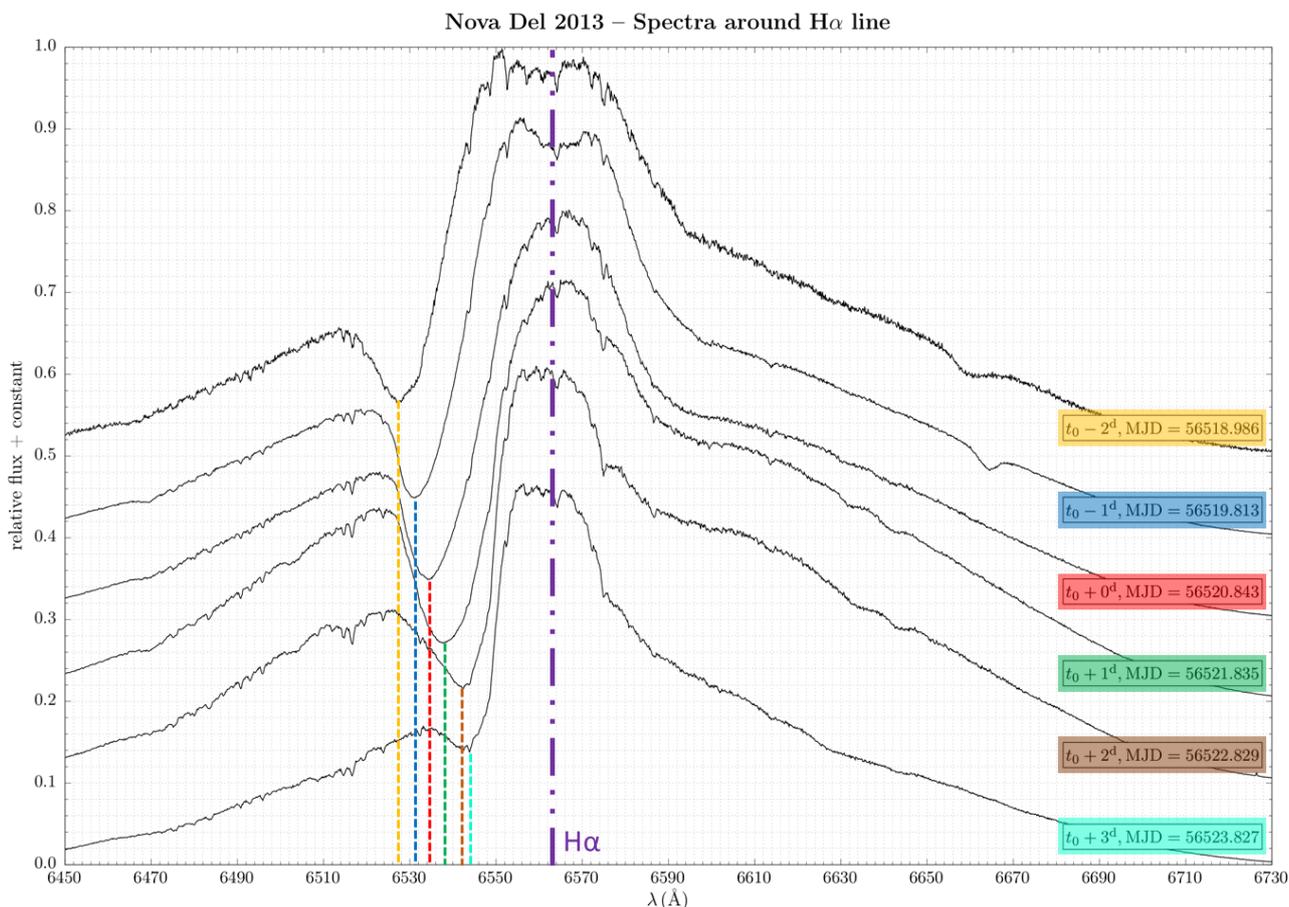
Tabela 2

f) A partir da figura 2, é possível estimar os seguintes comprimentos de onda em cada um dos perfis P Cygni.. Para obter a velocidade radial ( $v_r$ ) da nova, basta utilizar a relação do efeito Doppler tendo como referência a linha H $\alpha$  (6 563 Å). Tais valores são apresentados na tabela 2

MJD	$\lambda$ (Å)	$\Delta\lambda$ (Å)	$v_r$ (km/s)
56 518,986	6 527	-36	-1 646
56 519,813	6 531	-32	-1 463
56 520,843	6 534	-29	-1 326
56 521,835	6 538	-25	-1 143
56 522,829	6 542	-21	-960
56 523,827	6 544	-19	-869

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \therefore v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \cdot c$$

Figura 2



g) O gráfico pode ser visto na figura 3

Figura 3: Velocidades radiais da linha Her de Nova Del 2013

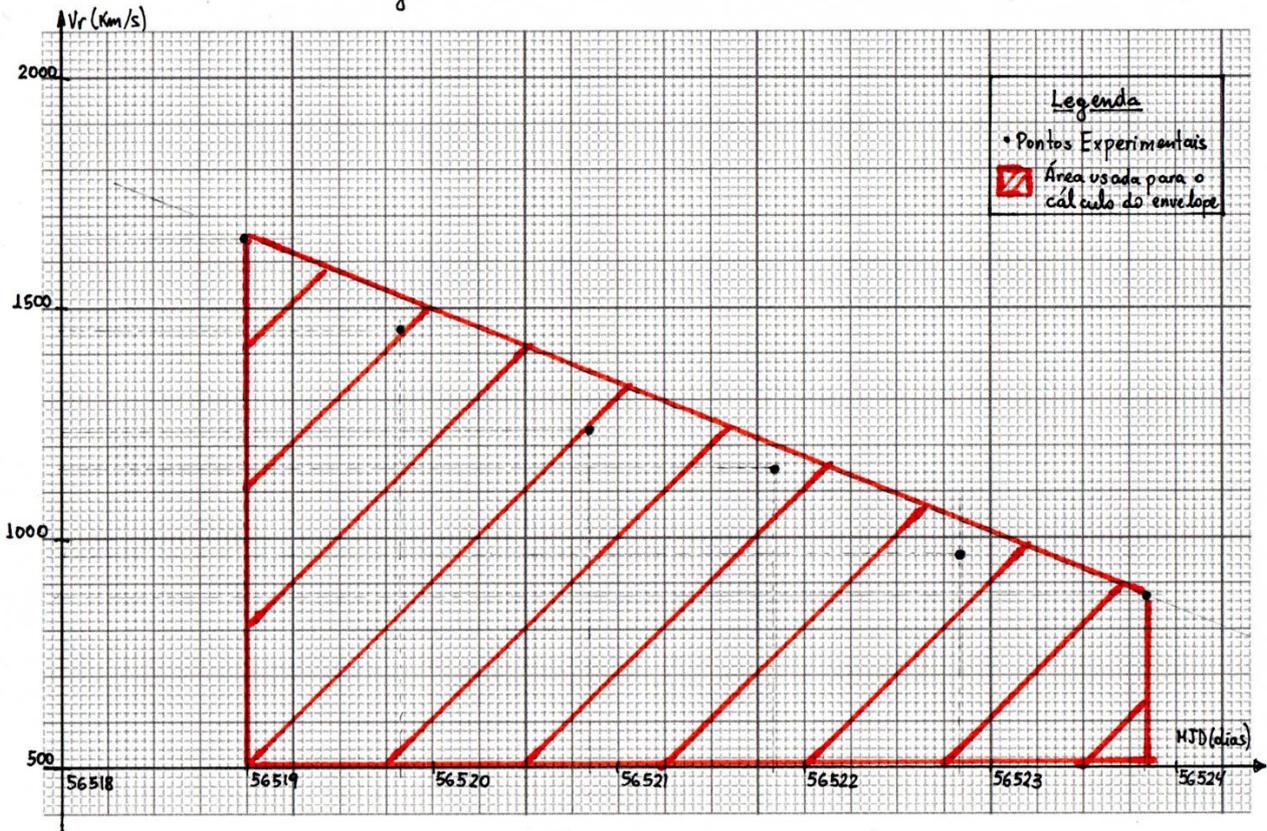


Figura 13: exemplo de gráfico

h) No caso, ao analisar as dimensões dos eixos da figura 3, nota-se que o produto entre eles formará uma grandeza do tipo L, ou seja, é possível estimar o raio físico do envelope calculando a área do gráfico correspondente aos dados coletados (área hachurada na figura 3). Como as velocidades radiais apresentam característica de uma reta, podemos aproximar a região para um trapézio, calculando assim sua área.

$$R_{\text{env}} \equiv A = \frac{|v_{r,i} + v_{r,f}| \cdot (MJD_f - MJD_i)}{2}, \begin{cases} v_{r,i} + v_{r,f} = 2,514 \text{ km/s} \\ MJD_f - MJD_i = 4,841 \text{ dias} \end{cases}$$

$$\therefore R_{\text{env}} = 5,258 \times 10^{11} \text{ m} \approx 3,5 \text{ ua}$$

OBS: Uma maneira mais fiel seria traçando a reta de ajuste na figura 3, e usando os valores de  $v_r$  que a reta apresenta para as datas julianas inicial e final.

i) O diâmetro angular aparente deste envelope, quando visto da Terra, pode ser determinada via geometria, como visto na figura 4. Desta maneira:

$$\tan \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2} = \frac{R}{D} \Rightarrow \theta('') = 2 \times \frac{3,5 \text{ ua}}{3 \text{ 200 pc}}$$

$$\therefore \theta \approx 0,00219 = 2,19 \text{ mas}$$

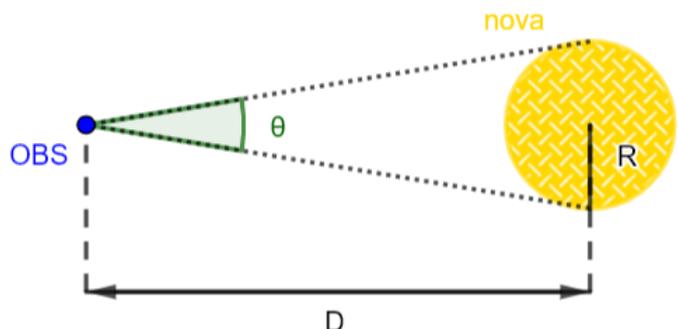


Figura 14: OBS = Observador na Terra

## Gabaritos

### Astronomia

- 1) a)  $0^{\circ}44'09''$  S b)  $1^{\circ}19'33''$  S c)  $0^{\circ}44'09''$  N    2) a) 6h b) 21 ou 22 de junho c) Tau (Taurus) d)  $62^{\circ}02'$
- 3)  $H = 2h08\text{ min}$ ;  $z = 24^{\circ}33'$     4) a)  $0,528^{\circ}$  b)  $0,538^{\circ}$
- 5) a) 6h 53min 58s b)  $|\phi| \geq 27^{\circ}19'$  S c) No equador. d) Solstício de dezembro.    6) 13h09min
- 7) a)  $\delta < 90^{\circ} - |\alpha|$  b) Ver resolução. c) 16,7 h    8) 4192 m    9)  $38,46^{\circ}$
- 10) a) Tempo solar verdadeiro. b) Ponto cardeal Sul. c) Azul: Solstício de dezembro; Vermelho: Solstício de Junho.  
d) Equinócios.    e) 12h05min    11) 500 km    12) 87,1 km    13) 2 de fevereiro.
- 14) a) 8,61 cm b) 22,87 cm c) Das 10h10min às 13h50min. d) A partir das 16h.    15) 585 m
- 16) a) Ver resolução. b)  $64,7R_{\oplus}$
- 17) Ponto A:  $90^{\circ}\text{N}$ ; indefinido / Ponto B:  $32,7075^{\circ}\text{N}$ ; 0h / Ponto C:  $32,7075^{\circ}\text{N}$ ; 4,5418 h
- 18) a) 6,01 kpc b) 13,93 kpc    19)  $67^{\circ}$     20) Ver resolução.
- 21) a)  $20,73^{\circ}\text{N}$  b)  $20^{\circ}$  c) Nascer:  $67,76^{\circ}$ ; Pôr:  $292,24^{\circ}$  d) Máx =  $59,42''$ ; Mín =  $9,67''$  e) 11min28s
- f) As Plêiades não são circumpolares em Tilum.    g) 16 de março de 3116 a.C.
- 22) a) 19,86 anos;  $242,83^{\circ}$  b) Capricórnio c) Peixes d) Virgem
- 23) a)  $34^{\circ}11'45''$  b) 4,4852 pc c)  $\theta_{\text{Vega}} = 35^{\circ}04'11''$ ;  $\theta_{\text{Altair}} = 54^{\circ}27'12,5''$  d) Dois pontos.
- e)  $\delta = -29^{\circ}07'26''$ ;  $\alpha = 15h57min10s$  f) Vega: 796 000 a.C.; Altair: 350 000 a.C.    g)  $41,513^{\circ}$
- h) As trajetórias não possuem pontos em comum.

### Astrofísica

- 1)  $6,4 \cdot 10^4 d_L$     2)  $1,49 \cdot 10^{16} \text{ m}$     3) a) 0,81 b)  $M_V = -1,41$ ;  $\pi_A = 0,021''$ ;  $\pi_B = 0,026''$ ;  $\pi_C = 0,013''$
- 4) a) 53,7 kpc b) 60,2 kpc    5) a) Sim b) Não (Ver justificativas na resolução.)
- 6) Júpiter: 16,6 mas (Sim); Lua: 0,0259 mas (Não)    7) a)  $D \geq \frac{1,22\lambda c^2 d}{6GM}$  b) i.  $0,585R_{\oplus}$  ii.  $0,51R_{\oplus}$  c) B
- 8) a) 0,89 b)  $R_1 = 4,38 \cdot 10^{10} \text{ m}$ ;  $R_2 = 4,92 \cdot 10^{10} \text{ m}$  c)  $6,514 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$  d) 296 pc    9)  $8,4 \cdot 10^4$
- 10) a) 29009 km b)  $e = 0,684$ ;  $P = 8,41 \text{ h}$     11) a) 4451,6 K b)  $0,20 L_{\odot}$  c) 7260 km d) 0,583 ua e) 218 K
- 12) a) 150 cm b) 151 cm c)  $40''$     13) a) 1ª estrela =  $-0,44$ ; 2ª estrela =  $-0,12$  b) Mais avermelhada.
- 14) a)  $A_{\text{mín}} = \frac{90k_b TR}{umaGM}$  b) 50 uma c) Nenhum dos gases pode ser retido pela atmosfera de Plutão.
- 15) a) 6371 km b) 4505 km c) 1,02 h    16) a) 4,40 K b)  $659 \mu\text{m}$ ; micro-ondas c)  $2,32 \cdot 10^{12}$  anos    17) 5430 K
- 18) a)  $a = -2,85$ ;  $b = 17$  b)  $a = -2,85$ ;  $M_0 = -1,34$  c) 1 dia d) 30,5 e) 25 Mpc f)  $-19,38$

- 19)**  $z_{\text{blue}} = -1,742 \cdot 10^{-3}$ ;  $z_{\text{red}} = +1,008 \cdot 10^{-3}$     **20)** a)  $R = 8,142 \cdot 10^7 \text{ m}$ ;  $r = 7,470 \cdot 10^6 \text{ m}$     b) 2560 K
- c)  $m_2 = m_1 + 2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right)$     d)  $1,58 \cdot 10^{29} \text{ kg}$  (Ver os demais resultados na tabela da resolução.)
- e) TRAPPIST-1c; TRAPPIST-1d    f) 195,4 anos    **21)** a)  $2,319 \cdot 10^6 \text{ W}$     b)  $2,05 \cdot 10^{16}$     c) 3445 anos
- 22)** a) 0,161    b) 0,252    c) Sim.    **23)** a) Para  $r < R_b$ :  $v = r \sqrt{\frac{4\pi G m}{3}}$ ; Para  $r \geq R_b$ :  $v' = \sqrt{\frac{4\pi G m R_b^3}{3r}}$     b) Ver resolução.
- c)  $6,5 \cdot 10^8$     d) Ver resolução.    e) Para  $r < R_b$ :  $v = 82,27 r$ ; Para  $r \geq R_b$ :  $v' = 150,07 \text{ km/s}$     f)  $9,65 \cdot 10^9 M_{\odot}$
- g) -2    h) Ver resolução.    **24)** 9min31s    **25)** a) 96 Mpc    b) 2,80 Mpc    c) Ver resolução.    d)  $2,28 \cdot 10^{15} M_{\odot}$     e) 456
- 26)** a) 3000    b) 8200 K    c) 3,46 eV    **27)** a)  $3,578 \cdot 10^4 \text{ km}$     b)  $v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$
- c)  $\Delta v_{12} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_1}} \cdot \left[\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right]$ ;  $\Delta v_{23} = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_2}} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right]$     d) 9,664 m/s    e) -1500 m/s
- f)  $\sqrt{\frac{2}{r_1+R_{\oplus}}} \leq \sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} + \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right]$     **28)** a) 41,5 km/s    b)  $\ell = \sqrt{GM_{\odot} a(1 - e^2)}$     c) 67,3 km/s
- 29)** a)  $p_N = \frac{h^2}{20m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}}$     b)  $U_G = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$     c) 11 km    d) 570 *peta* kg/m<sup>3</sup>    e)  $1,5 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$
- 30)**  $v = c \cdot \frac{E_{\text{máx}} - E_{\text{mín}}}{E_{\text{máx}} + E_{\text{mín}}}$     **31)**  $6,81 \cdot 10^4 \text{ múons}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$     **32)** a)  $2,43 \cdot 10^9 \text{ anos}$     b) 21,6 kpc    c)  $2,13 M_{\odot}$     d)  $2,13 \cdot 10^4$
- e)  $3,81 \cdot 10^5$     f)  $0,118 M_{\odot}$     **33)** a) Ver resolução.    b)  $\beta = \cos\theta$ ;  $\beta_{\text{mín}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- c)  $\beta_a = 1,50$ ;  $\beta_r = 0,636$ ;  $\beta_{\text{mín},a} = 0,832$     d)  $D = \frac{c}{2} \left(\frac{\mu_a - \mu_r}{\mu_a \mu_r}\right) \tan\theta$ ;  $65,6^\circ$     e) Ver resolução; 0,980    f)  $14,7 M_{\odot}$
- 34)** a)  $3,3 \cdot 10^{13} M_{\odot}$     b) 1068    **35)** a)  $2,62 \cdot 10^{-5} \text{ J}$     b)  $5,14 \cdot 10^{-3} \text{ J}$     c) A energia gasta para levantar a folha de papel é maior do que a energia coletada pelo FAST no arranjo de frequências em discussão.
- 36)** a)  $2,766 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{dia})$     b)  $2,2 M_{\odot}$     c) Ver resolução;  $P_{\text{orb}} = 84 \pm 1 \text{ dia}$ ;  $K = 46 \pm 1 \text{ km/s}$     d)  $76,3 R_{\odot} = 0,354 \text{ ua}$
- e)  $0,843 M_{\odot}$     f)  $L_1 = (6 \pm 3) \cdot 10^2 L_{\odot}$ ;  $R_1 = (33 \pm 1) R_{\odot}$ ;  $M_1 = (6,2 \pm 1,4) M_{\odot}$ ;  $\text{sen } i = 0,71 \pm 0,03$     g) Opção 3.
- h) Ver resolução.    i) Ver resolução.    **37)** a)  $MJD_{0,V} = 56\,520,5 \pm 0,5 \text{ dia}$ ;  $m_{0,V} = 4,55 \pm 0,05 \text{ mag}$
- b)  $t_2 = 11,5 \pm 0,5 \text{ dia}$ ;  $t_3 = 24,5 \pm 0,5 \text{ dia}$     c)  $-8,6 \pm 0,1$     d)  $0,57 \pm 0,11$     e)  $3,3 \pm 0,4 \text{ kpc}$
- f) Ver resolução.    g) Ver resolução.    h) 3,5 ua    i) 2,19 mas

## Tabelas e constantes

### Alfabeto grego

Maiúscula	Minúscula	Pronúncia
A	$\alpha$	alfa
B	$\beta$	beta
$\Gamma$	$\gamma$	gama
$\Delta$	$\delta$	delta
E	$\epsilon$	épsilon
Z	$\zeta$	dzeta
H	$\eta$	eta
$\Theta$	$\theta$	teta
I	$\iota$	iota
K	$\kappa$	capa
$\Lambda$	$\lambda$	lâmbda
M	$\mu$	mi

Maiúscula	Minúscula	Pronúncia
N	$\nu$	ni
$\Xi$	$\xi$	ksi
O	$\omicron$	ômicron
$\Pi$	$\pi$	pi
P	$\rho$	rô
$\Sigma$	$\sigma$	sigma
T	$\tau$	tau
Y	$\upsilon$	ípsilon
$\Phi$	$\phi, \varphi$	fi
X	$\chi$	qui
$\Psi$	$\psi$	psi
$\Omega$	$\omega$	ômega

### Distâncias

Nome	Símbolo	Valores
Unidade astronômica	ua	1 ua = $1,496 \cdot 10^{11}$ m
Ano-luz	al	1 al = $9,461 \cdot 10^{15}$ m = 63 240 ua
Parsec	pc	1 pc = $3,086 \cdot 10^{16}$ m = 206 264,806 ua = 3,262 al

### Constantes físicas

Constantes físicas	Símbolo	Valores
carga elétrica elementar	e	$1,602 \cdot 10^{-19}$ C
massa de repouso do elétron	-	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa de repouso do próton	-	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
massa de repouso do nêutron	-	$1,675 \cdot 10^{-27}$ kg
constante de Avogadro	$N_A$	$6,022 \cdot 10^{23}$ mol <sup>-1</sup>
constante de Planck	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s
constante dos gases	R	8,314 J/(K.mol)
constante da gravitação universal	G	$6,673 \cdot 10^{-11}$ N.m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
velocidade da luz no vácuo	c	$2,998 \cdot 10^8$ m/s
constante de Stefan - Boltzmann	$\sigma$	$5,670 \cdot 10^{-8}$ W/(m <sup>2</sup> .K <sup>4</sup> )
constante de Boltzmann	k	$1,381 \cdot 10^{-23}$ J/K
constante de Wien	b	$2,898 \cdot 10^{-3}$ m.K
constante de Hubble	$H_0$	$67,80 \pm 0,77$ km/(s.Mpc)
unidade de massa atômica	u.m.a	1 u.m.a. = $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

## Dados da Lua

Propriedades	Valores
Massa	$7,349 \cdot 10^{22}$ kg
Raio médio	$1,737 \cdot 10^6$ m
Distância média Terra - Lua	$3,844 \cdot 10^8$ m
Densidade média	$3,36$ g/cm <sup>3</sup>
Aceleração da gravidade na superfície	$1,62$ m/s <sup>2</sup>
Temperatura	de $-170^{\circ}\text{C}$ a $120^{\circ}\text{C}$
Distância média a Terra	$3,78 \cdot 10^8$ m

## Constantes matemáticas

Constantes	Valores ( $\approx$ )
$\pi$	3,141593
e	2,718282
1 rad	$57,29578^{\circ}$
$1^{\circ}$	0,017453 rad
$1''$	$4,848 \cdot 10^{-8}$ rad

Dados do Sol ( $\odot$ )

Propriedades	Valores
Massa	$1,989 \cdot 10^{30}$ kg
Raio	$6,955 \cdot 10^8$ m
Temperatura efetiva	5780 K
Luminosidade	$3,96 \cdot 10^{26}$ W
Magnitude visual aparente na banda V	-26,78
Magnitude visual absoluta na banda V	4,75
Magnitude bolométrica absoluta	4,72
Inclinação do equador com a eclíptica	$7^{\circ}15'$
Diâmetro angular aparente	$30'$
Distância ao centro da galáxia	8,5 kpc

Dados da Terra ( $\oplus$ )

Propriedades	Valores
Massa	$5,974 \cdot 10^{24}$ kg
Raio polar	$6,357 \cdot 10^6$ m
Raio equatorial	$6,378 \cdot 10^6$ m
Raio da esfera de mesmo volume	$6,371 \cdot 10^6$ m
Perímetro aproximado da linha do equador	40 000 km
Volume	$1,087 \cdot 10^{21}$ m <sup>3</sup>
Densidade média	$5,52$ g/cm <sup>3</sup>
Constante solar	$1366$ W/m <sup>2</sup>
Velocidade orbital média	29,783 km/s
Distância média ao Sol	$1,49 \cdot 10^{11}$ m
Aceleração da gravidade ao nível do mar a $45^{\circ}$ de latitude	$9,807$ m/s <sup>2</sup>